



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

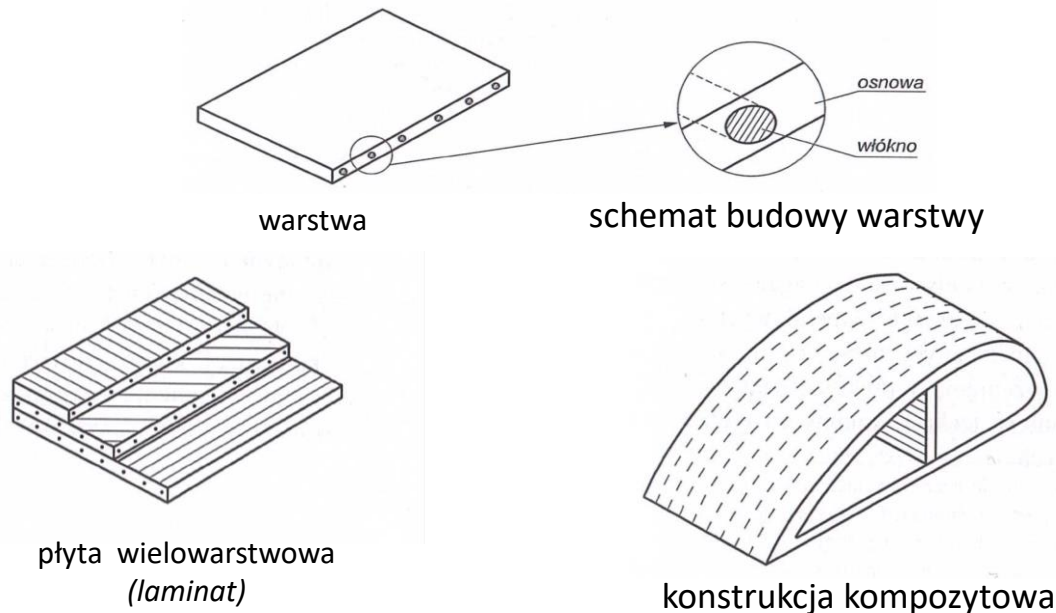
Wykład 6. Modele kompozytów

11.2024

PODSTAWY MECHANIKI MATERIAŁÓW I STRUKTUR KOMPOZYTOWYCH

Kompozyt jest materiałem niejednorodnym i zazwyczaj wykazuje właściwości zależne od rozpatrywanego kierunku. Z tego powodu modele matematyczne opisujące zachowanie się struktury kompozytowej pod wpływem obciążeń zewnętrznych są znacznie bardziej skomplikowane, niż analogiczne związki dla materiałów jednorodnych i izotropowych, znane z podstawowych wykładów wytrzymałości materiałów i konstrukcji.

Analiza stanów naprężeń i odkształceń w konstrukcji kompozytowej jest zadaniem złożonym i może być przeprowadzana na różnych poziomach, z zastosowaniem modeli od skali mikro do skali makro.



Różne poziomy analizy wytrzymałościowe konstrukcji kompozytowej

Wielowarstwowe laminaty z włóknami kierunkowymi wykazały swoje zalety w licznych zastosowaniach. Ze względu na wysoce anizotropowe właściwości pojedynczych warstw, laminowane kompozyty pozwalają na projektowanie lekkich konstrukcji o właściwościach zoptymalizowanych do danych obciążeń/potrzeb.

Kompozyty mogą ulegać uszkodzeniom na skalę mikroskopową lub makroskopową. Mechanizmy uszkodzeń struktur kompozytowych są znacznie bardziej złożone niż te obserwowane w materiałach izotropowych.

Symulacje FEM mogą dostarczyć informacji dotyczących rozkładu naprężeń w wielowarstwowej powłoce i w warstwach. Te rozkłady naprężeń mogą być wykorzystane do oszacowania wytrzymałości pojedynczej warstwy, przy użyciu kryteriów wytrzymałości anizotropowej (*maksymalne naprężenie, maksymalne odkształcenie, Tsai-Hill, Tsai-Wu, Norris*).

Aby uzyskać skuteczne narzędzia do szczegółowej analizy wytrzymałości i projektowania kompozytowych struktur powłokowych, można zbudować wieloskalowe modele parametryczne, przechodząc od skali mikro do makro (*włókna z żywicą, tkanina tkana, pojedyncza warstwa, wielowarstwowy element powłoki, struktura*).

Materiały ortotropowe

Występowanie trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn symetrii właściwości materiału jest przypadkiem bardzo często występującym w praktyce inżynierskiej. Wówczas liczba niezależnych współczynników macierzy wyznaczającej związek między składowymi stanu naprężenia i stanu odkształcenia redukuje się do 9, a materiał nazywany ortotropowym.

Stałe materiałowe przyjmuje się zazwyczaj tak, że odpowiadają one interpretacyjnie modułowi Younga E , stałej Poissona ν i modułowi Kirchhoffa G dla przypadku izotropowego. Związek między stanem naprężenia i stanem odkształcenia przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}.$$

E_{11}, E_{22}, E_{33} - moduły sprężystości wzdłużnej (moduły Younga) odpowiednio w kierunkach 1, 2, 3,
 G_{12}, G_{23}, G_{31} - moduły sprężystości postaciowej w odpowiednich płaszczyznach,
 ν_{ij} - współczynniki Poissona.

Ze względu na symetrię macierzy, stałe ją określające muszą spełniać trzy dodatkowe warunki:

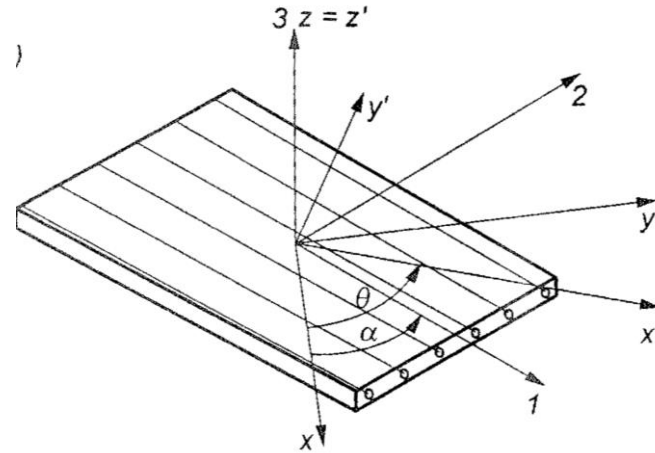
$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{31}}{E_{33}}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}}.$$

W efekcie prawo konstytutywne dla trójwymiarowego materiału ortotropowego zawiera 9 niezależnych stałych materiałowych $E_{11}, E_{22}, E_{33}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}, G_{12}, G_{23}, G_{31}$. Moduły E_{11}, E_{22}, E_{33} wyznaczone są z prób rozciągania wzdłuż głównych osi ortotropii, moduły G_{12}, G_{23}, G_{31} wymagają odpowiednich prób ścinania, natomiast każdą ze stałych ν_{ij} określa stosunek $-\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}}$ dla obciążenia próbki wyłącznie naprężeniem rozciągającym σ_{ii} .

ODKSZTAŁCENIA I NAPRĘŻENIA W WARSTWIE ORTOTROPOWEJ

W wielu konstrukcjach kompozytowych wyróżnić można warstwy o własnościach ortotropowych.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$



Analizując zależności między odkształceniami i naprężeniami w warstwie ortotropowej przyjmujemy zazwyczaj, że mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia (PSN). Jeżeli założymy, że cienka warstwa ortotropowa o kierunkach ortotropii 1 i 2 usytuowana jest i obciążona w płaszczyźnie, wtedy:

$$\begin{array}{l} \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \\ \tau_{31} = \tau_{23} = \sigma_{33} = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{\gamma_{31} = 0, \quad \gamma_{23} = 0, \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_{11}}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}}\sigma_{22}}$$

Związki między odkształceniami a naprężeniami redukują się wówczas do postaci:

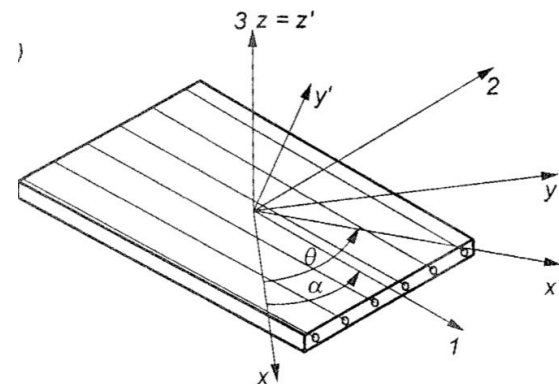
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Związki te mają macierze symetryczne, więc są w pełni określone przez 4 niezależne stałe materiałowe: E_{11} , E_{22} , ν_{12} , G_{12} .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{21} & 0 \\ E_{11} & E_{22} & \\ -\nu_{12} & 1 & 0 \\ E_{11} & E_{22} & \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & \nu_{12}E_{22} & 0 \\ 1 - \nu_{12}\nu_{21} & 1 - \nu_{12}\nu_{21} & \\ \nu_{21}E_{11} & E_{22} & \\ 1 - \nu_{12}\nu_{21} & 1 - \nu_{12}\nu_{21} & \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$



W literaturze technicznej zazwyczaj przyjmuje się tak oznaczenia, że $E_{11} > E_{22}$ a wówczas współczynnik ν_{12} nazywany jest większym współczynnikiem Poissona (*major*), a ν_{21} mniejszym współczynnikiem Poissona (*minor*).

Związki te odpowiadają przypadkowi, w którym kierunki 1 i 2 są głównymi kierunkami ortotropii warstwy. Jednakże w wielu przypadkach osie przyjętego układu współrzędnych nie pokrywają się z kierunkami głównymi materiału ortotropowego. Stan naprężenia i odkształcenia w dwóch dowolnych układach współrzędnych kartezjańskich obróconych względem siebie o kąt θ łączą zależności:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \frac{\gamma_{x'y'}}{2} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix}$$

Macierz transformacji $[T]$ ma postać:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Aby przedstawić zależności między składowymi stanu naprężenia a składowymi stanu odkształcenia dla warstwy ortotropowej przyjmijmy, że kierunki ortotropii 1 i 2 są odchylone o kąt α od kierunków x i y układu współrzędnych kartezjańskich. Poszukiwany ogólny związek odkształcenia-naprężenia dla warstwy ortotropowej w dowolnym układzie współrzędnych określonych przez kąt α ma postać:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* & Q_{16}^* \\ Q_{12}^* & Q_{22}^* & Q_{26}^* \\ Q_{16}^* & Q_{26}^* & Q_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Współczynniki S_{ij}^* określają wzory:

$$\begin{aligned} S_{11}^* &= S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4, \\ S_{12}^* &= S_{12}c^4 + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}s^4, \\ S_{22}^* &= S_{22}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{11}s^4, \\ S_{66}^* &= S_{66}c^4 + 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}s^4, \\ S_{16}^* &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c, \\ S_{26}^* &= (2S_{12} + S_{66} - 2S_{22})sc^3 - (2S_{12} + S_{66} - 2S_{11})s^3c, \end{aligned}$$

Współczynniki Q_{ij}^* określają wzory:

$$\begin{aligned} Q_{11}^* &= Q_{11}c^4 + (Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4, \\ Q_{12}^* &= S_{12}c^4 + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}s^4, \\ Q_{22}^* &= Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{11}s^4, \\ Q_{66}^* &= Q_{66}c^4 + (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}s^4, \\ Q_{16}^* &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})s^3c, \\ Q_{26}^* &= (Q_{12} + Q_{22} + 2Q_{66})sc^3 - (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{66})s^3c, \end{aligned}$$

gdzie $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$,
a współczynniki S_{ij} są równe:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}}, & S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_{22}}, \\ S_{22} &= \frac{1}{E_{22}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned}$$

gdzie Q_{ij} są równe:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12}. \end{aligned}$$

➔ Warto zwrócić uwagę, że jeśli $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, to wszystkie współczynniki macierzy $[Q^*]$ i $[S^*]$ są niezerowe i istnieje pełne sprzężenie między składowymi stanu naprężenia i stanu odkształcenia.

Tylko próbka rozciągana wzdłuż głównego kierunku ortotropii będzie zachowywała się podobnie jak izotropowa. Proste rozciąganie prowadzi wtedy jedynie do wydłużenia w kierunku rozciągania i skrócenia w kierunku poprzecznym, bez odkształceń kątowych. Jednak w przypadku rozciągania w innym, dowolnym kierunku zaobserwujemy również zmianę kątów.

Wynika stąd, że w ogólnym przypadku, **kiedy osie xy nie pokrywają się z głównymi kierunkami ortotropii, kierunki główne naprężeń nie pokrywają się z głównymi kierunkami odkształceń.**

HIPOTEZY WYTĘŻENIOWE DLA MATERIAŁÓW ORTOTROPOWYCH

W przypadku ortotropowym jednokierunkowe rozciąganie przy danej wartości obciążenia może dla pewnych kierunków prowadzić do zniszczenia, a dla innych nie. Jest to efekt, który nie występuje w materiałach izotropowych.

Dlatego też dla materiałów ortotropowych stosować trzeba odmienne kryteria wytrzymałościowe, które często są modyfikacjami (uogólnieniami) kryteriów opracowanych dla materiałów izotropowych.

Hipoteza maksymalnych naprężeń

Zakłada, że warunkiem stanu bezpiecznego warstwy ortotropowej jest by składowe stanu naprężenia w układzie głównych osi ortotropii materiału były mniejsze od określonych doświadczalnie wartości.

Graniczne wartości wyznaczone są zwykle odrębnie dla rozciągania i ściskania: $X_{ci} \neq -X_{ti}$

Dla trójwymiarowego stanu naprężenia stany bezpieczne określone są przez nierówności:

$$X_{c1} < \sigma_{11} < X_{t1} ; \quad X_{c2} < \sigma_{22} < X_{t2} ; \quad X_{c3} < \sigma_{33} < X_{t3}$$
$$|\tau_{12}| < S_{12}^w ; \quad |\tau_{23}| < S_{23}^w ; \quad |\tau_{13}| < S_{31}^w$$

⇒ Hipotezę można opisać jednym parametrem:

$$k = \max \left\{ \frac{\sigma_{11}}{X_{t1}} \text{ lub } \frac{\sigma_{11}}{X_{c1}}, \frac{\sigma_{22}}{X_{t2}} \text{ lub } \frac{\sigma_{22}}{X_{c2}}, \frac{\sigma_{33}}{X_{t3}} \text{ lub } \frac{\sigma_{33}}{X_{c3}}, \frac{|\tau_{12}|}{S_{12}^w}, \frac{|\tau_{23}|}{S_{23}^w}, \frac{|\tau_{13}|}{S_{31}^w} \right\}$$

gdzie: X_{ti} - odpowiada wartościom granicznym przy rozciąganiu w kierunkach $i=1,2,3$;
 X_{ci} - przy ściskaniu,
 S_{ij}^w - określają graniczne wartości przy ścinaniu w płaszczyznach ij .

Parametr k jest wskaźnikiem określającym stopień wytrzymałości materiału.

(Dla stanu bez naprężeń mamy $k=0$, dla stanu na granicy zniszczenia $k=1$).

Wskaźnik wytrzymałości k jest odwrotnością współczynnika bezpieczeństwa.

Hipoteza maksymalnych odkształceń

Jest podobna do hipotezy maksymalnych naprężeń, jednak podstawowe warunki narzucone są na odkształcenia w układzie głównych osi ortotropii.

Przyjmując, że znamy niszczące odkształcenia w układzie głównych osi ortotropii (ε_{ci} , ε_{ti} , γ_{ij}^* , $i=1,2,3$) mamy warunki:

$$\varepsilon_{c1} < \varepsilon_{11} < \varepsilon_{t2}, \quad \varepsilon_{c2} < \varepsilon_{22} < \varepsilon_{t2}, \quad \varepsilon_{c3} < \varepsilon_{33} < \varepsilon_{t3}$$
$$|\gamma_{12}| < \gamma_{12}^*, \quad |\gamma_{23}| < \gamma_{23}^*, \quad |\gamma_{31}| < \gamma_{31}^*$$

Wartości ε_{ci} , ε_{ti} , γ_{ij}^* oznaczają graniczne (niszczące) wartości dla poszczególnych składowych stanu odkształcenia z odróżnieniem ściskania i rozciągania.

⇒ Hipotezę maksymalnych odkształceń w tym sformułowaniu można opisać jednym parametrem:

$$k = \max \left\{ \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{t1}} \text{ lub } \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{c1}}, \quad \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{t2}} \text{ lub } \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{c2}}, \quad \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{t3}} \text{ lub } \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{c3}}, \quad \frac{|\gamma_{12}|}{\gamma_{12}^*}, \quad \frac{|\gamma_{23}|}{\gamma_{23}^*}, \quad \frac{|\gamma_{13}|}{\gamma_{13}^*} \right\}$$

gdzie odpowiedni warunek dla odkształceń wzdłużnych zależy od aktualnego znaku odkształcenia (rozciąganie lub ściskanie).

Parametr k jest wskaźnikiem określającym stopień wyczerpania materiału ($k=1$ oznacza zniszczenie).

Hipoteza Tsai–Wu

W kryteriach maksymalnych odkształceń i maksymalnych naprężeń poszczególne składowe stanu naprężenia i odkształcenia traktowane są jako niezależnie wpływające na wyłączenie materiału.

Przyjmując, że ma znaczenie równoczesne występowanie poszczególnych składowych stanu naprężenia niektóre hipotezy przyjmują, że wyłączenie materiału jest wielomianową funkcją składowych stanu naprężenia.

Dobrze sprawdzającym się kryterium tego typu jest kryterium Tsai-Wu (1971).

Tsai i Wu zaproponowali kryterium dla warstwy ortotropowej, w którym ograniczyli się tylko do pierwszych wyrazów wielomianu:

$$F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_6\tau_{12} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1$$

Stałe materiałowe $F_1, F_2, F_6, F_{11}, F_{22}, F_{66}, F_{12}$ można uzależnić od parametrów $X_{c1}, X_{t1}, X_{c2}, X_{t2}, S_{12}^w$ rozpatrując kolejno rozciąganie i ściskanie w kierunkach $i = 1, 2$ oraz ścinanie:

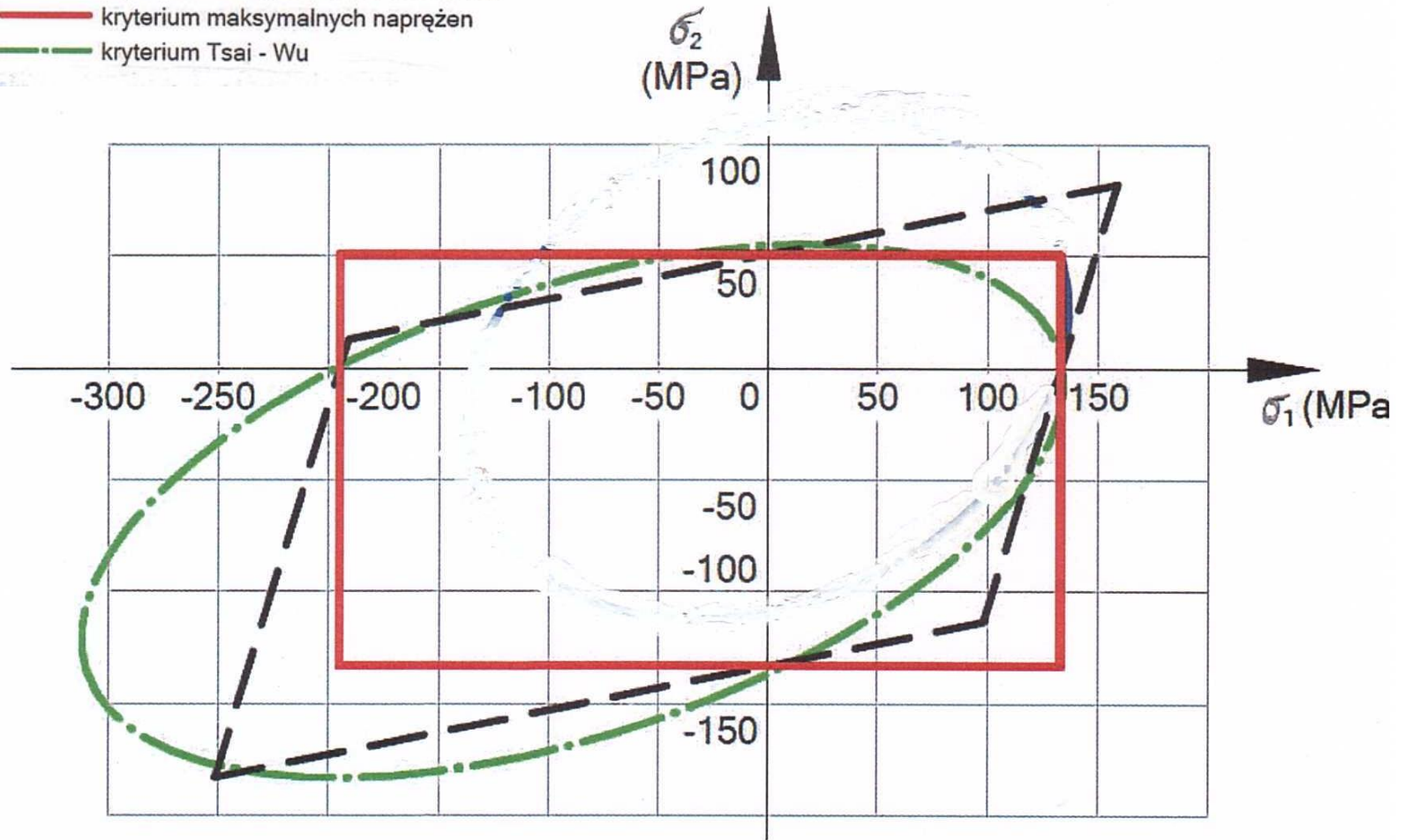
$$F_1 = \frac{1}{X_{t1}} + \frac{1}{X_{c1}}, \quad F_{11} = \frac{-1}{X_{c1}X_{t1}}$$

$$F_2 = \frac{1}{X_{t2}} + \frac{1}{X_{c2}}, \quad F_{22} = \frac{-1}{X_{t2}X_{c2}}$$

$$F_{66} = \frac{1}{S_{12}^w}, \quad F_6 = 0$$

$$F_{12} = -\frac{\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}}{2}$$

- kryterium maksymalnych odkształceń
- kryterium maksymalnych naprężeń
- kryterium Tsai - Wu



Linie niszczących stanów naprężenia w układzie naprężeń głównych σ_1 σ_2 według różnych hipotez .

Obszary zamknięte odpowiednimi liniami odpowiadają bezpiecznym stanom naprężenia ($k < 1$)

Przykład 1 Rozciąganie warstwy ortotropowej

Warstwa ortotropowa ma własności: $E_{11} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_{22} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.
Znaleźć składowe stanu odkształcenia w układzie xy w wyniku rozciągania w kierunku x $\sigma_{xx} = 10 \text{ MPa}$ w zależności od wielkości kąta α .

Rozwiązanie analityczne:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{16}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{26}^* \\ S_{16}^* & S_{26}^* & S_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= S_{11}^* \sigma_{xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= S_{12}^* \sigma_{xx}, \\ \gamma_{xy} &= S_{16}^* \sigma_{xx}, \end{aligned}$$

gdzie:

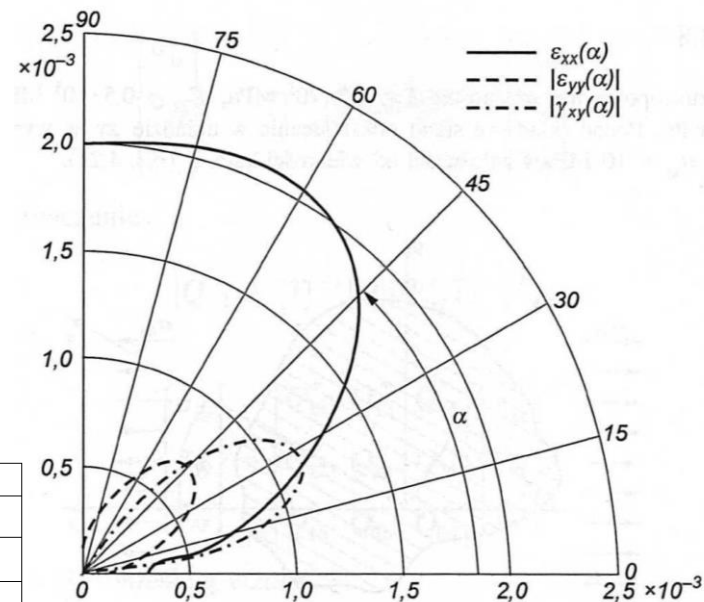
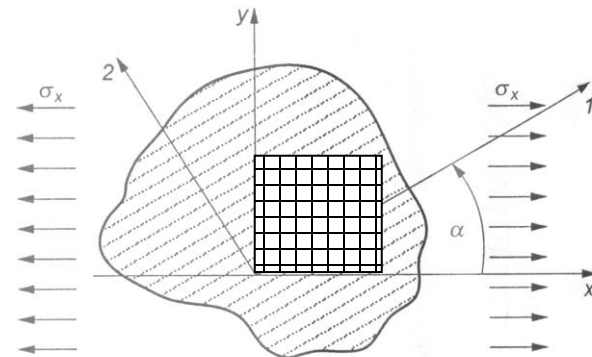
$$\begin{aligned} S_{11}^* &= S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4, \\ S_{12}^* &= S_{12}c^4 + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 + S_{12}s^4, \\ S_{16}^* &= (2S_{12} + S_{66} - 2S_{22})sc^3 - (2S_{12} + S_{66} - 2S_{11})s^3c. \end{aligned}$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_{22}}, \quad S_{12} = \frac{-\nu_{21}}{E_{22}} = \frac{-\nu_{12}}{E_{11}}, \quad S_{66} = G_{12}.$$

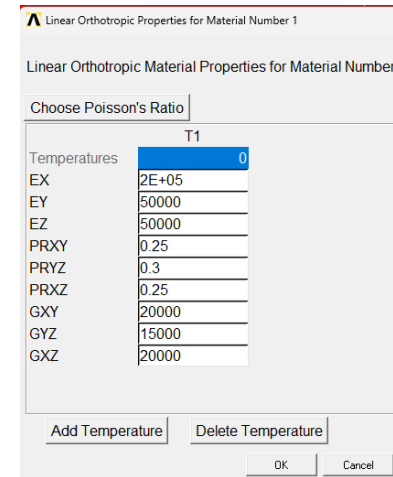
Podstawiając podane wartości stałych materiałowych dla różnych kątów α i stałego rozciągania $\sigma_{xx} = 10 \text{ MPa}$ otrzymamy:

Odkształcenia warstwy izotropowej w zależności od kierunku rozciągania

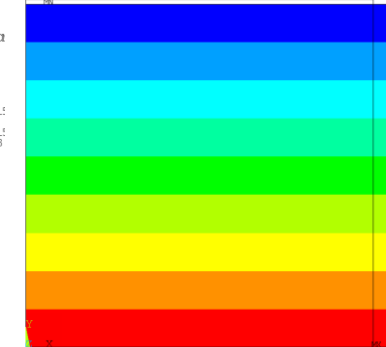
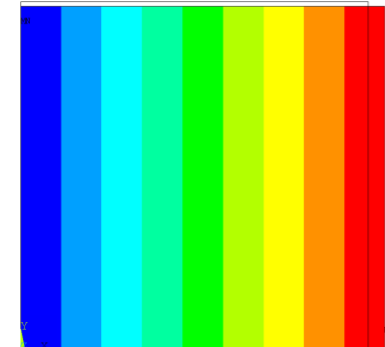
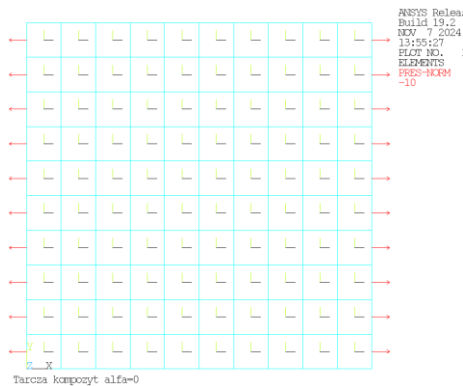
α	0	5	15	30	45	60	75	85	90
$10^4 \varepsilon_{xx}$	0,5	0,528	0,741	1,297	1,812	2,047	2,040	2,006	2,000
$10^4 \varepsilon_{yy}$	-0,125	-0,142	-0,266	-0,547	-0,688	-0,547	-0,266	-0,142	-0,125
$10^4 \gamma_{xy}$	0	-0,323	-0,862	-1,137	-0,75	-0,162	-0,112	-0,062	0



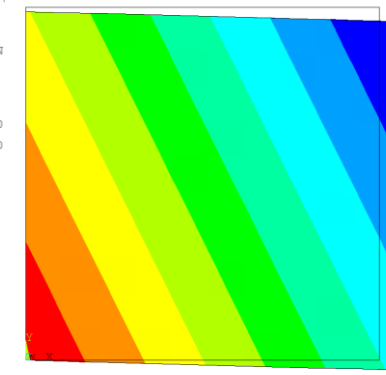
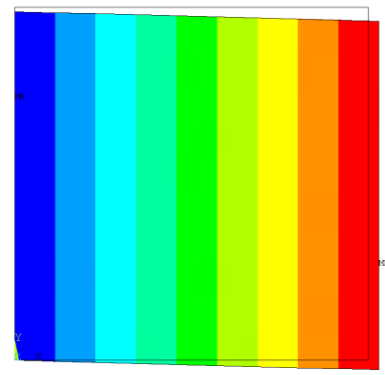
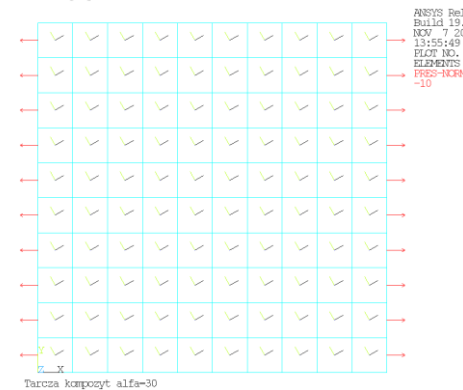
Przemieszczenia w rozciąganej warstwie ortotropowej



$\alpha = 0^\circ$

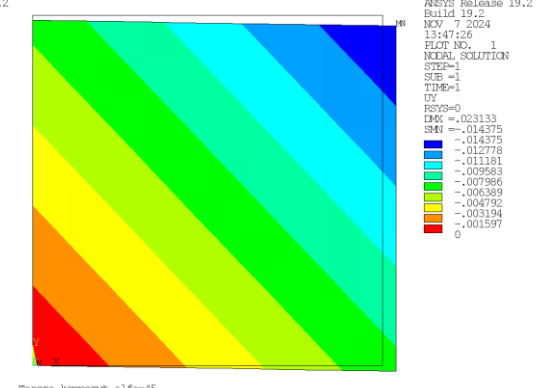
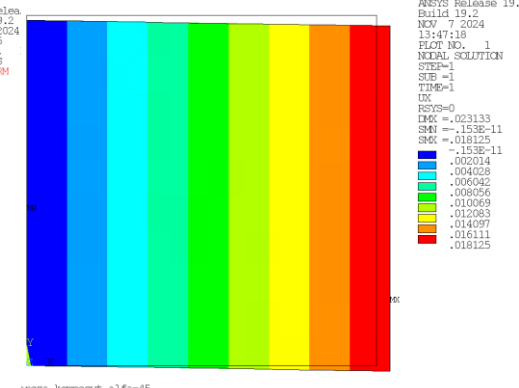
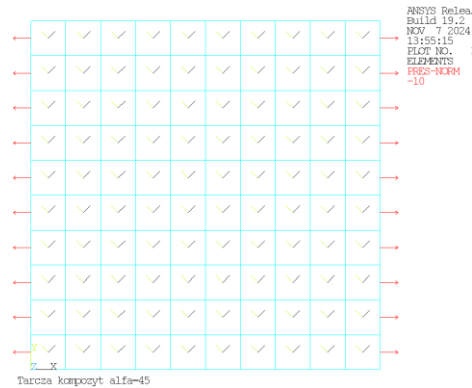


$\alpha = 30^\circ$

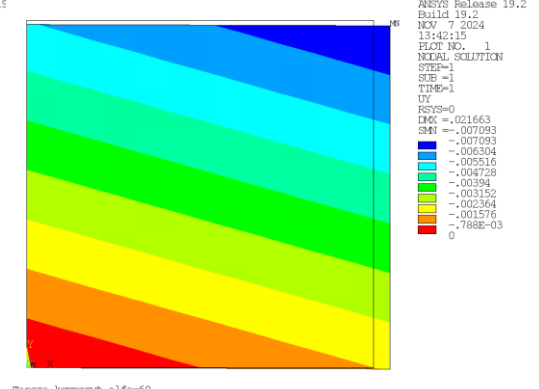
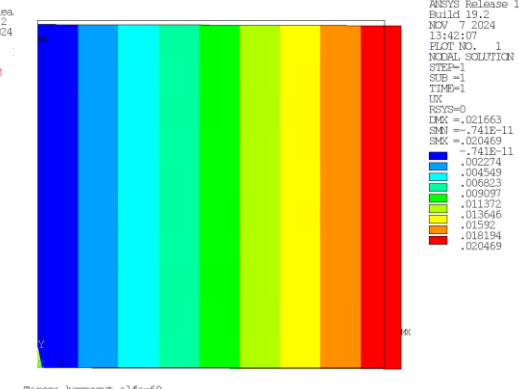
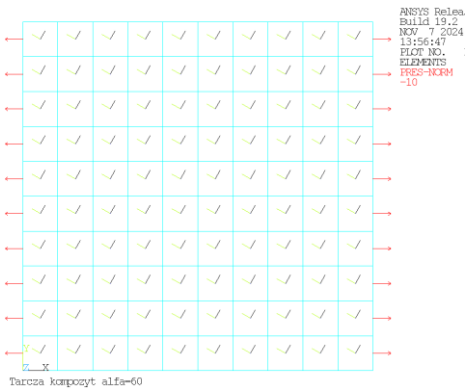


Przemieszczenia w rozciąganej warstwie ortotropowej

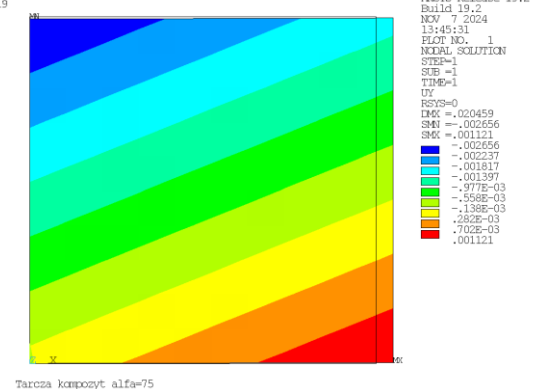
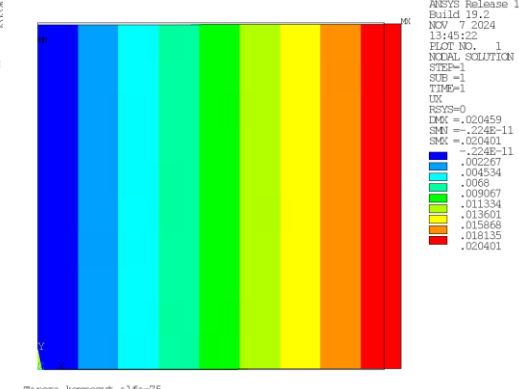
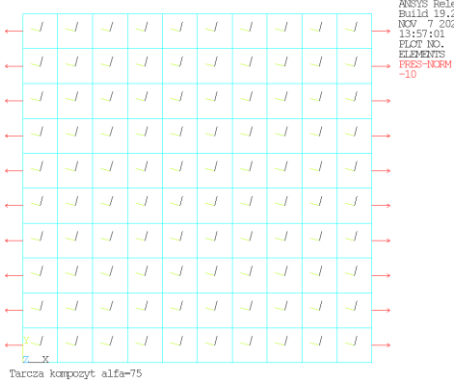
$\alpha = 45^\circ$



$\alpha = 60^\circ$

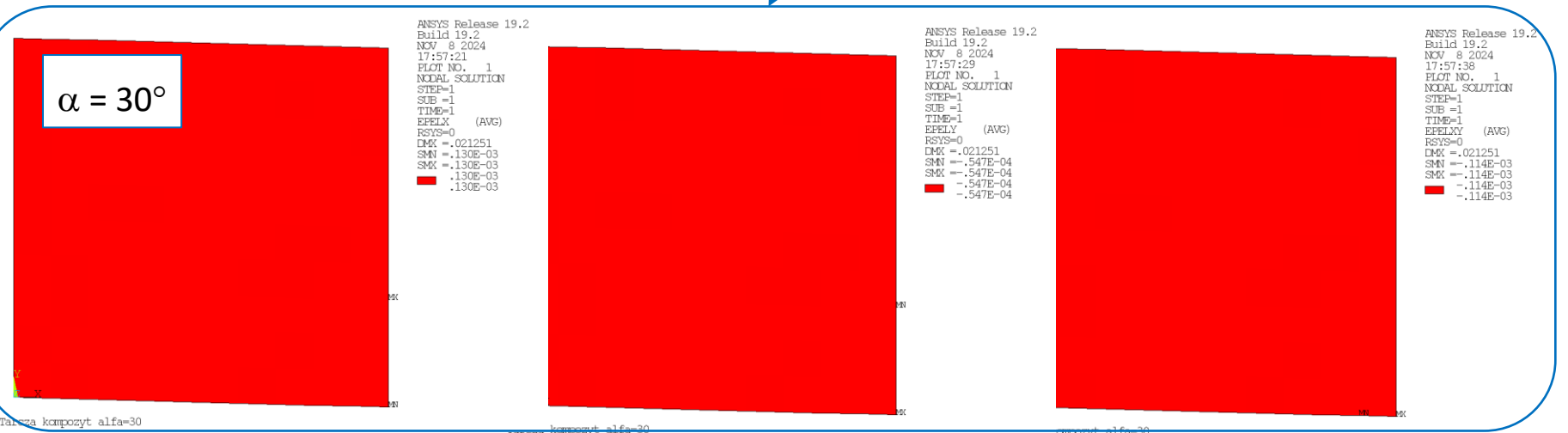
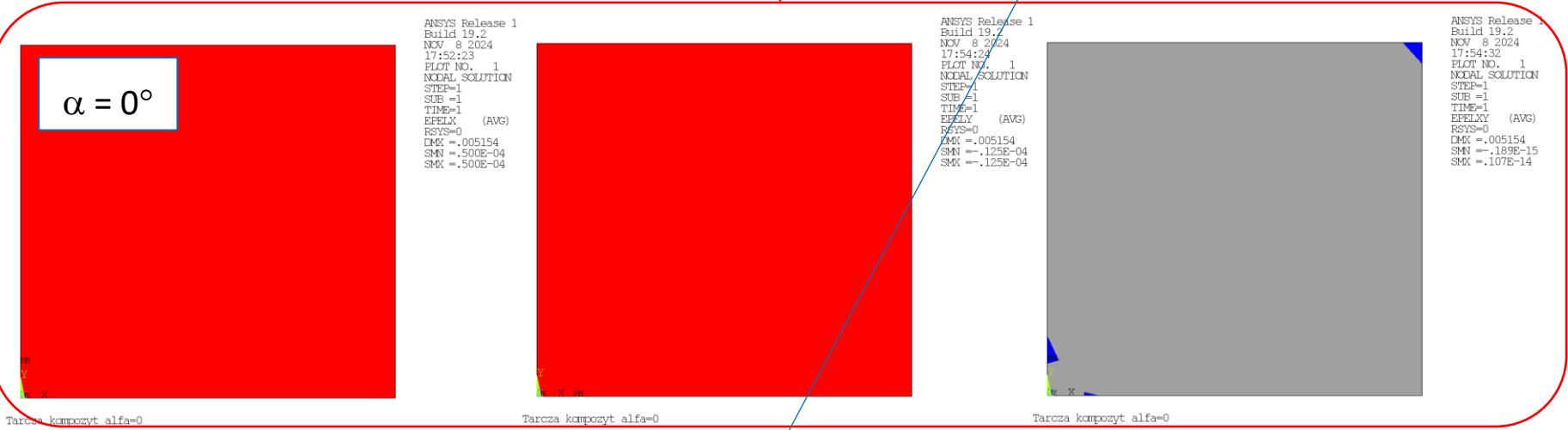


$\alpha = 75^\circ$



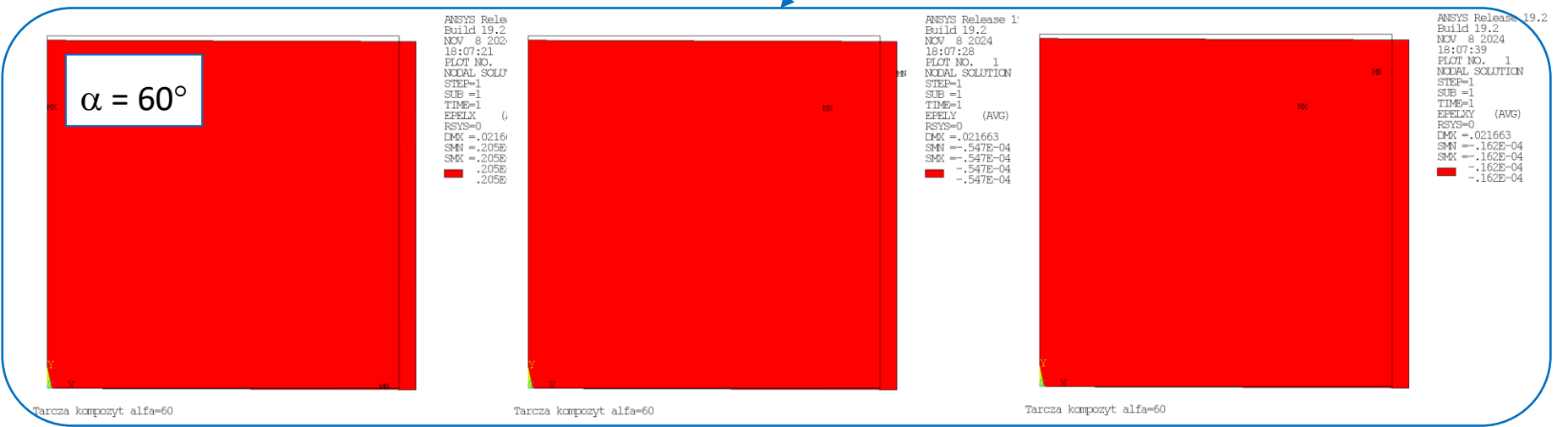
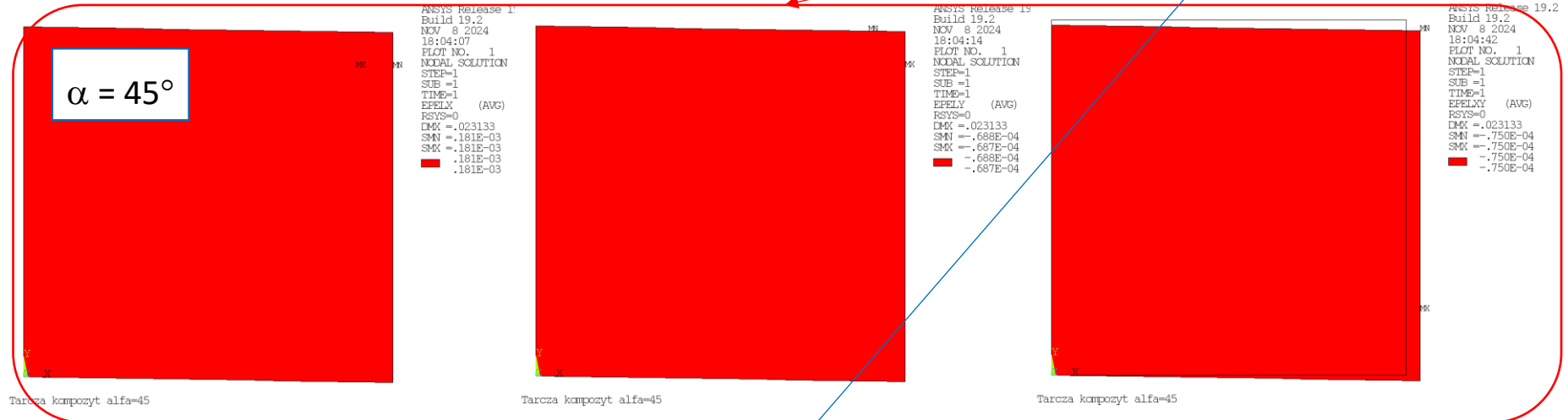
Odkształcenie w rozciąganej warstwie ortotropowej

α	0	5	15	30	45	60	75	85	90
$10^4 \varepsilon_{xx}$	0,5	0,528	0,741	1,297	1,812	2,047	2,040	2,006	2,000
$10^4 \varepsilon_{yy}$	-0,125	-0,142	-0,266	-0,547	-0,688	-0,547	-0,266	-0,142	-0,125
$10^4 \gamma_{xy}$	0	-0,323	-0,862	-1,137	-0,75	-0,162	-0,112	-0,062	0

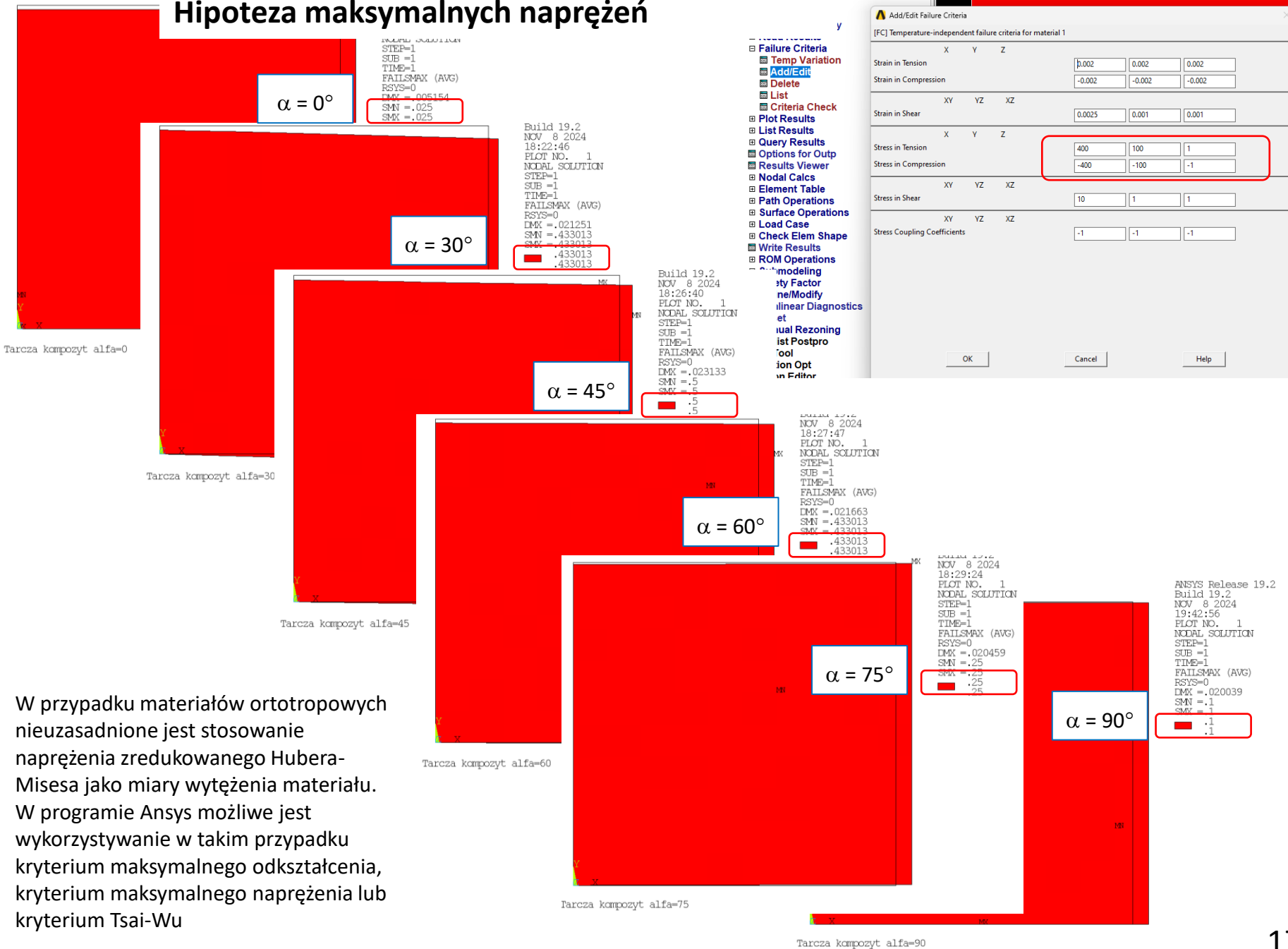


Odkształcenie w rozciąganej warstwie ortotropowej

α	0	5	15	30	45	60	75	85	90
$10^4 \varepsilon_{xx}$	0,5	0,528	0,741	1,297	1,812	2,047	2,040	2,006	2,000
$10^4 \varepsilon_{yy}$	-0,125	-0,142	-0,266	-0,547	-0,688	-0,547	-0,266	-0,142	-0,125
$10^4 \gamma_{xy}$	0	-0,323	-0,862	-1.137	-0,75	-0,162	-0,112	-0,062	0



Hipoteza maksymalnych naprężeń



W przypadku materiałów ortotropowych nieuzasadnione jest stosowanie naprężenia zredukowanego Hubera-Misesa jako miary wyężenia materiału. W programie Ansys możliwe jest wykorzystywanie w takim przypadku kryterium maksymalnego odkształcenia, kryterium maksymalnego naprężenia lub kryterium Tsai-Wu

Hipoteza Tsai Wu

$\alpha = 0^\circ$

```

STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILTWSI (AVG)
RSYS=0
DMX =.005154
SMN =.625E-03
SMX =.625E-03
    
```

$\alpha = 30^\circ$

```

Build 19.2
NOV 8 2024
19:53:51
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTIO
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILTWSI (AVG)
RSYS=0
DMX =.021251
SMN =.188008
SMX =.188008
    
```

$\alpha = 45^\circ$

```

Build 19.2
NOV 8 2024
19:53:36
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTIO
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILTWSI (AVG)
RSYS=0
DMX =.023133
SMN =.252031
SMX =.252031
    
```

$\alpha = 60^\circ$

```

Build 19.2
NOV 8 2024
19:53:19
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTIO
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILTWSI (AVG)
RSYS=0
DMX =.021663
SMN =.192695
SMX =.192695
    
```

$\alpha = 75^\circ$

```

Build 19.2
NOV 8 2024
19:53:05
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTIO
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILTWSI (AVG)
RSYS=0
DMX =.020459
SMN =.071052
SMX =.071052
    
```

$\alpha = 90^\circ$

```

ANSYS Release 19.2
Build 19.2
NOV 8 2024
19:52:49
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTIO
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILTWSI (AVG)
RSYS=0
DMX =.02003
SMN =.01
SMX =.01
    
```

- Results
- Failure Criteria
 - Temp Variation
 - Add/Edit
 - Delete
 - List
 - Criteria Check
- Plot Results
- List Results
- Query Results
- Options for Output
- Results Viewer
- Nodal Calcs
- Element Table
- Path Operations
- Surface Operations
- Load Case
- Check Elem Shape
- Write Results
- ROM Operations
- Submodeling
- Safety Factor
- Define/Modify
- Nonlinear Diagnostics
- Reset
- Manual Rezone
- TimeHist Postpro
- ROM Tool
- Radiation Opt
- Section Editor

Add/Edit Failure Criteria

[FC] Temperature-independent failure criteria for material 1

Strain in Tension	X	Y	Z
	0.002	0.002	0.002
Strain in Compression			
	-0.002	-0.002	-0.002
Strain in Shear	XY	YZ	XZ
	0.0025	0.001	0.001
Stress in Tension	X	Y	Z
	400	100	1
Stress in Compression			
	-400	-100	-1
Stress in Shear	XY	YZ	XZ
	10	1	1
Stress Coupling Coefficients	XY	YZ	XZ
	-1	-1	-1

OK Cancel Help

Tarcza kompozyt alfa=0

Tarcza kompozyt alfa=3

Tarcza kompozyt alfa=45

Tarcza kompozyt alfa=60

Tarcza kompozyt alfa=75

Tarcza kompozyt alfa=90

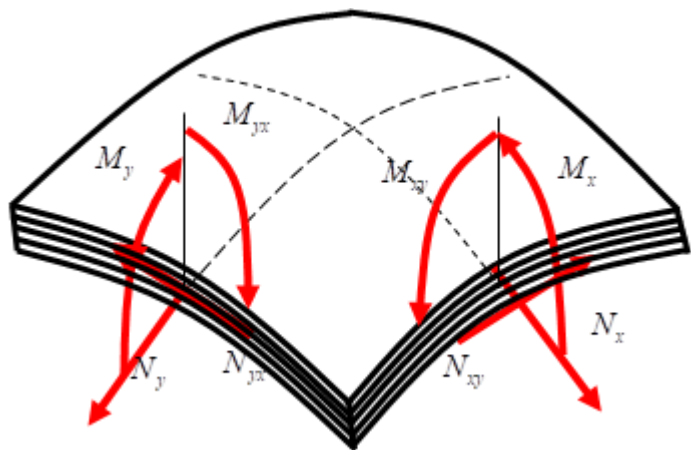
W przypadku materiałów ortotropowych nieuzasadnione jest stosowanie naprężenia zredukowanego Hubera-Misesa jako miary wytrzymałości materiału. W programie Ansys możliwe jest wykorzystywanie w takim przypadku kryterium maksymalnego odkształcenia, kryterium maksymalnego naprężenia lub kryterium Tsai-Wu

Podstawowe związki mechaniki laminatów

Przy rozważaniu własności laminatu składającego się z wielu warstw ortotropowych ściśle związanych ze sobą zakłada się czasami, że pracuje on podobnie jak pojedyncza warstwa.

Dla laminatów cienkich (grubości poszczególnych warstw i grubość całkowita są znacznie mniejsze od pozostałych wymiarów) pominąć można naprężenia prostopadłe do warstw i założyć, że w laminacie zachodzi ciągłość odkształceń przy przejściu pomiędzy warstwami oraz nieciągłość naprężeń wskutek różnic we własnościach poszczególnych warstw.

Jeśli założymy, że rozpatrujemy małe ugięcia i zachowana jest ponadto hipoteza Kirchoffa (*prosta normalna do powierzchni laminatu pozostaje do niej normalna po odkształceniu*) to zachowanie się laminatu pod wpływem obciążenia opisuje następująca zależność:



Siły i momenty działające na segment powłoki

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ – składowe stanu odkształcenia powierzchni środkowej laminatu,

$\kappa_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \kappa_y = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$ – krzywizny powierzchni laminatu,

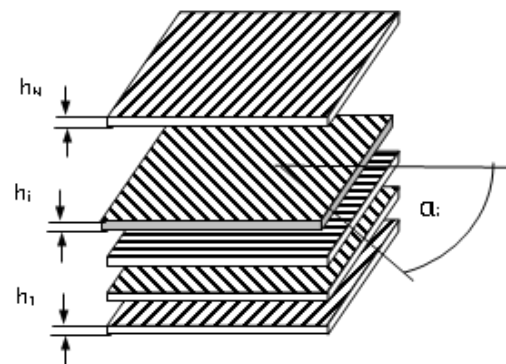
w_0 – ugięcie powierzchni środkowej laminatu,

$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ – siły wewnętrzne w laminacie,

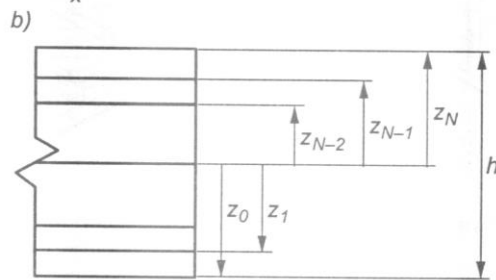
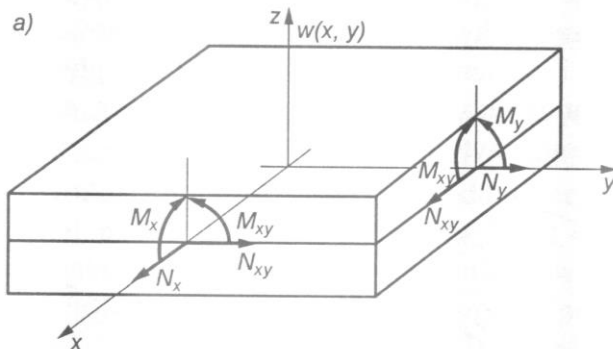
A – macierz sztywności laminatu w płaszczyźnie,

B – macierz sztywności sprzęgająca,

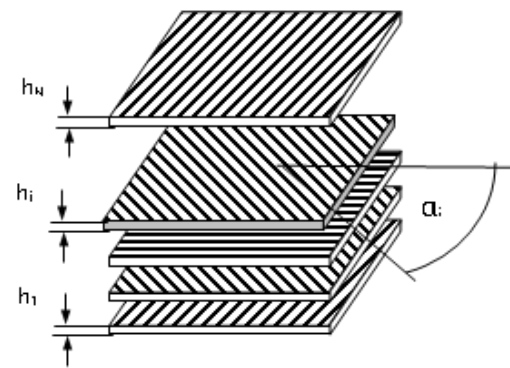
D – macierz sztywności giętno-skrętnej.



Podstawowe związki mechaniki laminatów



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$



gdzie:

$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ – składowe stanu odkształcenia powierzchni środkowej laminatu,

$\kappa_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \kappa_y = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$ – krzywizny powierzchni laminatu,

w_0 – ugięcie powierzchni środkowej laminatu,

$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ – siły wewnętrzne w laminacie,

A – macierz sztywności laminatu w płaszczyźnie,

B – macierz sztywności sprzęgająca,

D – macierz sztywności giętno-skrętnej.

Macierze A, B, D , każda o wymiarach 3×3 , które charakteryzują zachowanie się laminatu są symetryczne i zależą od właściwości wszystkich warstw ortotropowych, ich orientacji i usytuowania w laminacie:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k - z_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{*k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

gdzie: z_k – odległość k -tej warstwy od powierzchni średniej,

N – liczba warstw,

Q_{ij}^{*k} – macierz sztywności k -tej warstwy transformowana do układu xy

Przykład 2 Rozciąganie laminatu 6 warstwowego

Określić zachowanie się **6-cio warstwowej płyty kompozytowej** pod wpływem **jednokierunkowego rozciągania** $N_x = 10\text{N/mm}$. Grubość każdej warstwy wynosi $0,125\text{ mm}$, natomiast kąty ortotropii warstw wynoszą kolejno $[45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ]$.

Wymiary modelu:

- długość $L_x = 100\text{ mm}$,
- szerokość $L_y = 100\text{ mm}$,

Każda warstwa jest wykonana z żywicy epoksydowej z włóknami grafitowymi o właściwościach:

- moduły Younga $E_{11} = 211000\text{ MPa}$, $E_{21} = 5300\text{ MPa}$,
- moduł Kirchhoffa $G_{12} = 2600\text{ MPa}$,
- liczba Poissona $\nu_{12} = 0.25$,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie analityczne:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.348e-4 & -1.216e-4 & 0 & 0 & 0 & -1.69e-5 \\ -1.216e-4 & 1.348e-4 & 0 & 0 & 0 & -1.69e-5 \\ 0 & 0 & 2.685e-5 & -1.69e-5 & -1.69e-5 & 0 \\ 0 & 0 & -1.69e-5 & 2.876e-3 & -2.594e-3 & 0 \\ 0 & 0 & -1.69e-5 & -2.594e-3 & 2.876e-3 & 0 \\ -1.69e-5 & -1.69e-5 & 0 & 0 & 0 & 5.728e-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd wyliczyć można stan odkształcenia modelu:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.348e-3 \\ -1.216e-3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.69e-4 \end{bmatrix}$$

Uwzględniając, że stan odkształceń jest stały, maksymalne przemieszczenia modelu można wyznaczyć analitycznie:

$$\begin{aligned} U_x &= \varepsilon_x^0 L_x = 0,135\text{ mm}, \\ U_y &= \varepsilon_y^0 L_y = -0,122\text{ mm}, \\ U_z &= \kappa_{xy} \frac{L_x L_y}{2} = -0,845\text{ mm}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie MES rozciąganie laminatu 6 warstwowego

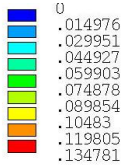
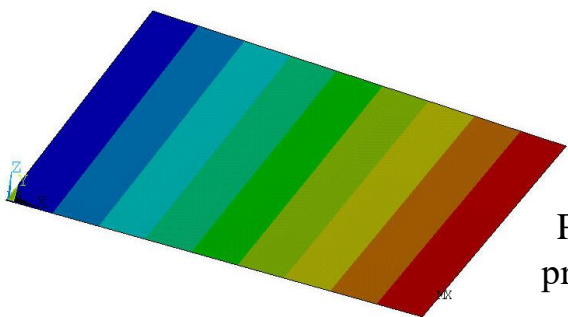
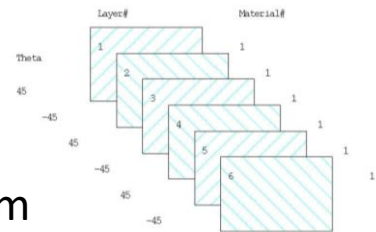
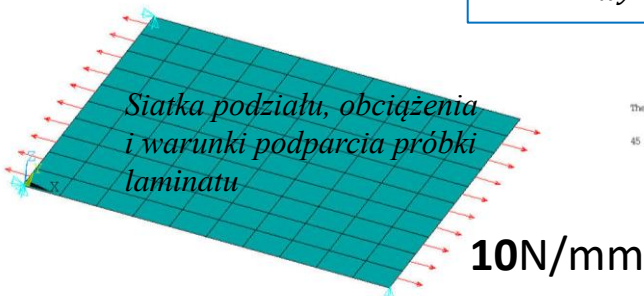
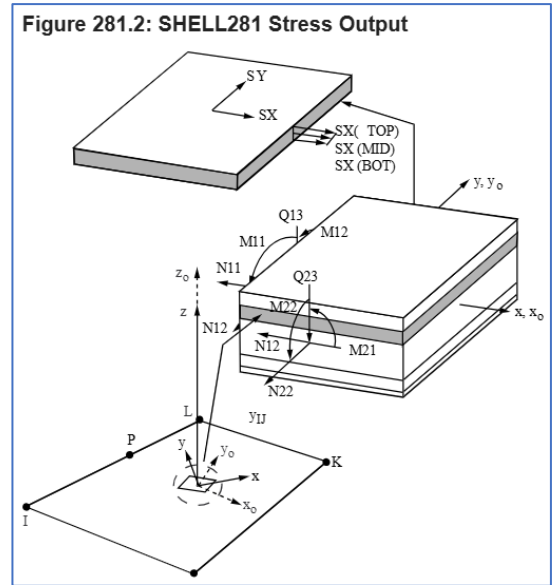
$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.348e-3 \\ -1.216e-3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.69e-4 \end{bmatrix}$$

Uwzględniając, że stan odkształceń jest stały, maksymalne przemieszczenia modelu można wyznaczyć analitycznie:

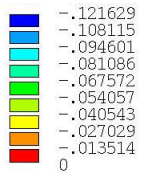
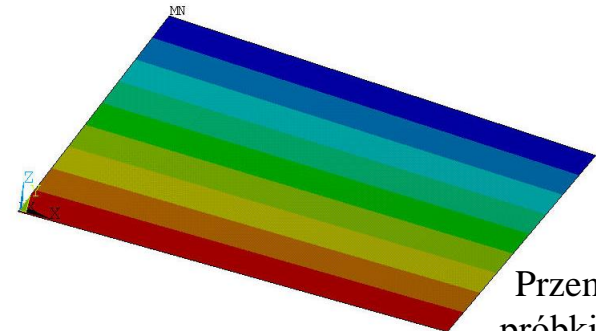
$$U_x = \epsilon_x^0 L_x = 0,135 \text{ mm},$$

$$U_y = \epsilon_y^0 L_y = -0,122 \text{ mm},$$

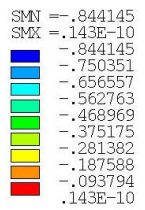
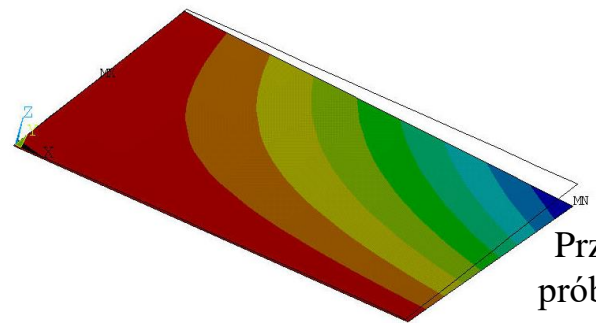
$$U_z = \kappa_{xy} \frac{L_x L_y}{2} = -0,845 \text{ mm}.$$



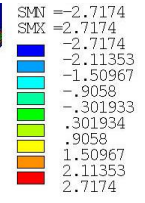
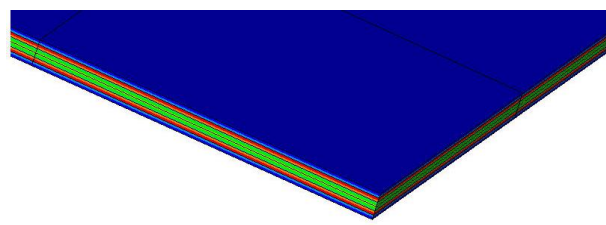
Przemieszczenia u_x próbki laminatu (mm)



Przemieszczenia u_y próbki laminatu (mm)

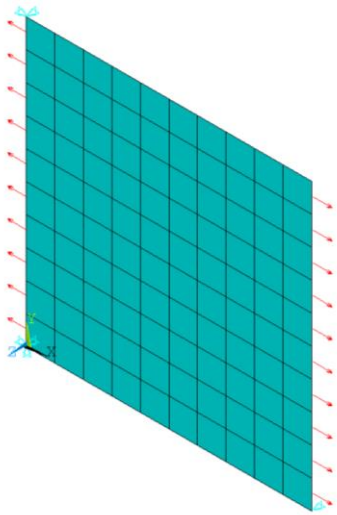


Przemieszczenia u_z próbki laminatu (mm)



Prezentacja naprężeń we wszystkich warstwach (σ_y)

Rozwiązanie MES rozciąganie laminatu 6 warstwowego



ANSYS Release 19.2
Build 19.2
NOV 9 2024
19:12:33
PLOT NO. 1
ELEMENTS
PowerGraphics
EFACET=1
PPRES-NORM
-10

Linear Orthotropic Properties for Material Number 1

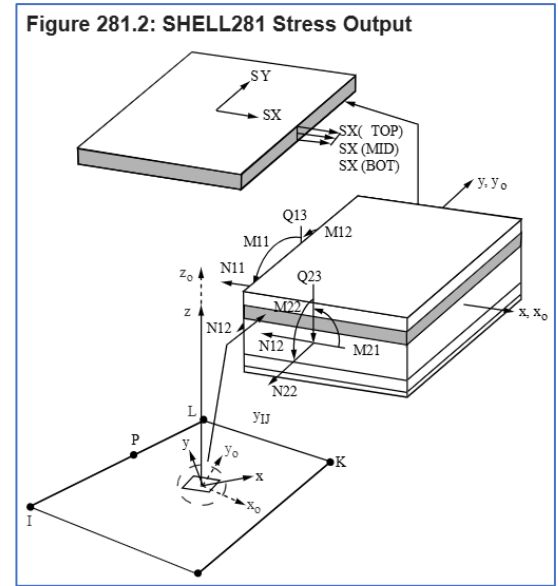
Linear Orthotropic Material Properties for Material Number 1

Choose Poisson's Ratio

Temperatures	T1
EX	2.11E+05
EY	5300
EZ	1000
PRXY	0.25
PRYZ	0
PRXZ	0
GXY	2600
GYZ	1000
GXZ	1000

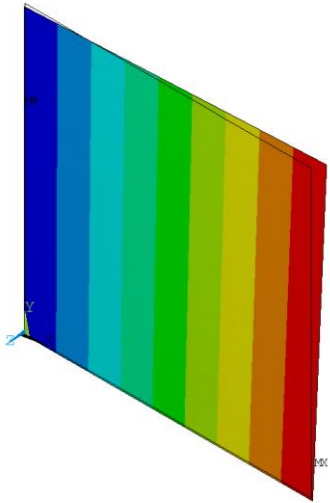
Add Temperature Delete Temperature Graph

OK Cancel Help



UX

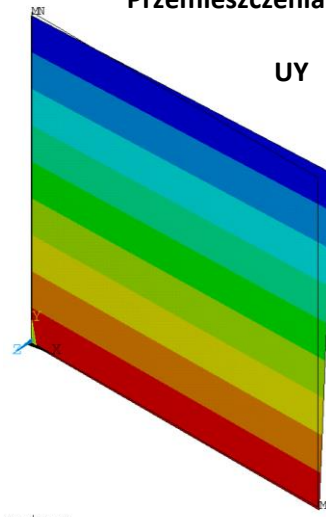
ANSYS Release 19.2
Build 19.2
NOV 9 2024
19:13:51
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UX (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.863447
SMN =-.120E-11
SMX =.134781
-.120E-11
.014976
.023951
.044927
.059903
.074878
.089854
.10483
.119805
.134781



Przemieszczenia

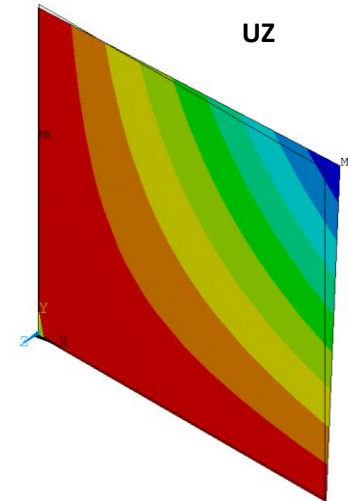
UY

ANSYS Release 19.2
Build 19.2
NOV 9 2024
19:14:02
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.863447
SMN =-.121629
SMX =.144E-11
-.108115
-.094601
-.081086
-.067572
-.054057
-.040543
-.027029
-.013514
.144E-11



UZ

ANSYS Release 19.2
Build 19.2
NOV 9 2024
19:14:14
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.863447
SMN =-.844145
SMX =.523E-11
-.844145
-.750351
-.636657
-.562763
-.468969
-.375175
-.281382
-.187588
-.093794
.523E-11



Przykład 3 Rozciąganie laminatu 4warstwowego

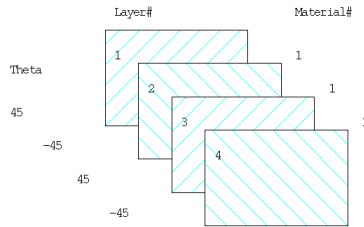
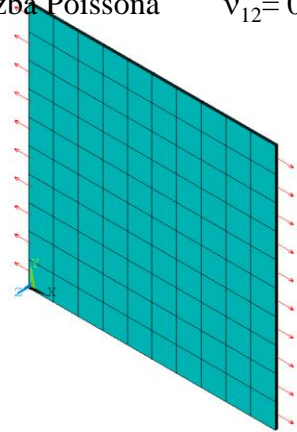
Określić zachowanie się 4-cio warstwowej płyty kompozytowej pod wpływem jednokierunkowego rozciągania $N_x = 10\text{N/mm}$. Grubość każdej warstwy wynosi 0,25 mm, natomiast kąty ortotropii warstw wynoszą kolejno $[45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ]$.

Wymiary modelu:

- długość $L_x = 100\text{ mm}$,
- szerokość $L_y = 100\text{ mm}$,

Każda warstwa jest wykonana z żywicy epoksydowej z włóknami grafitowymi:

- moduły Younga $E_{11} = 211000\text{ MPa}$, $E_{21} = 5300\text{ MPa}$,
- moduł Kirchhoffa $G_{12} = 2600\text{ MPa}$,
- liczba Poissona $\nu_{12} = 0.25$,



Add/Edit Failure Criteria

[FC] Temperature-independent failure criteria for material 1

	X	Y	Z
Strain in Tension	0.0019	0.0019	0.001
Strain in Compression	-0.0019	-0.0019	-0.001
Strain in Shear	0.0025	0.001	0.001
Stress in Tension	400	10	1
Stress in Compression	-400	-10	-1
Stress in Shear	10	1	1
Stress Coupling Coefficients	-1	-1	-1

Linear Orthotropic Properties for Material Num1

Linear Orthotropic Material Properties for Material Num1

Choose Poisson's Ratio

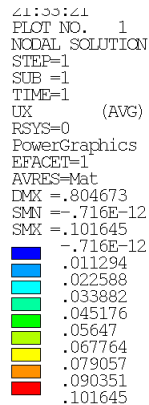
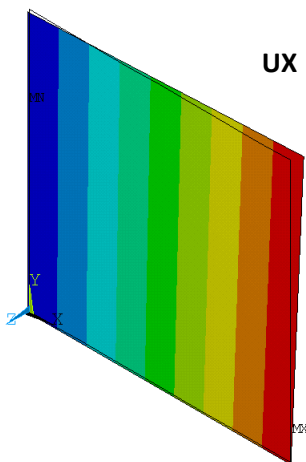
T1

Temperatures	0
EX	2.11E+05
EY	5300
EZ	1000
PRXY	0.25
PRYZ	0
PRXZ	0
GXY	2600
GYZ	1000
GXZ	1000

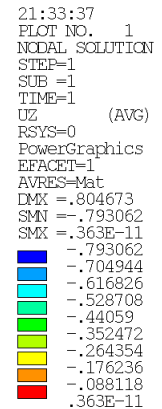
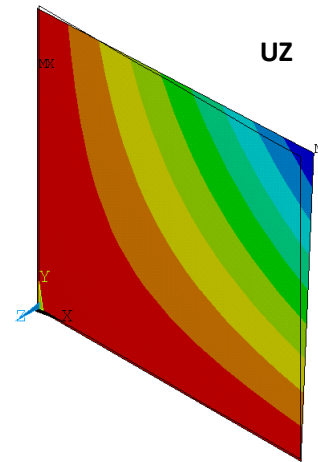
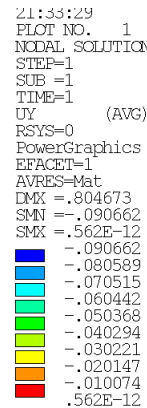
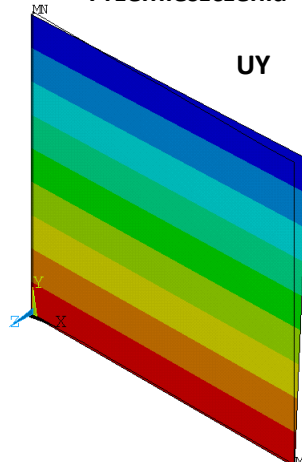
Add Temperature Delete Temp

$[45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ]$ - niesymetrycznie

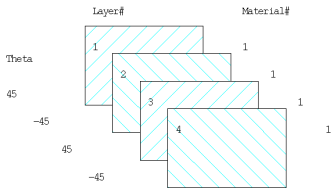
kompozyt 4 warstwowy



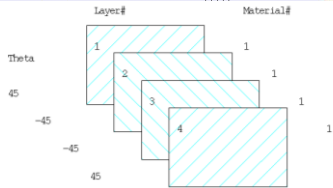
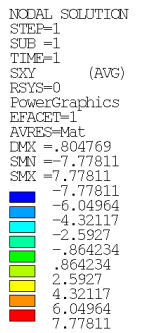
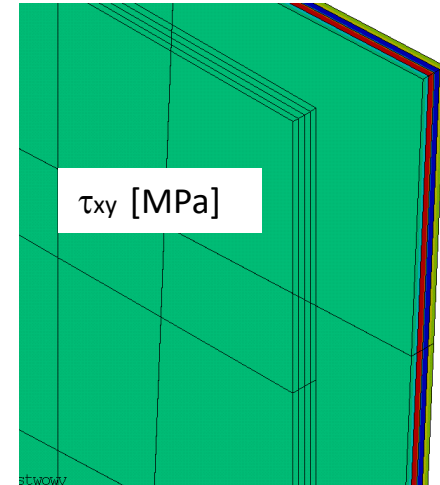
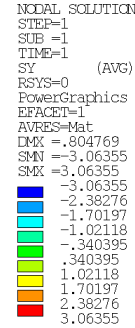
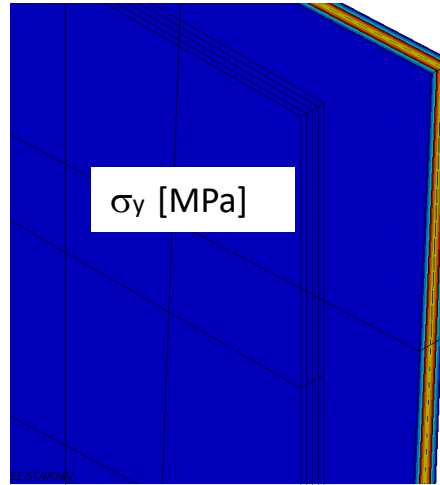
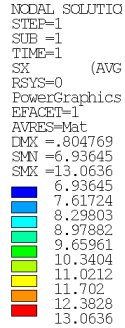
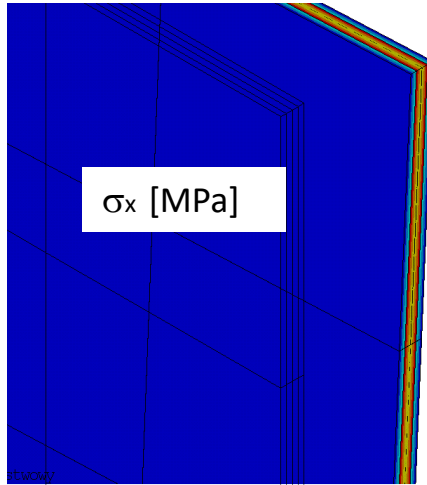
Przemieszczenia



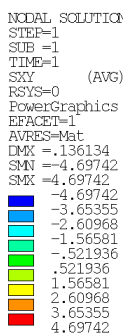
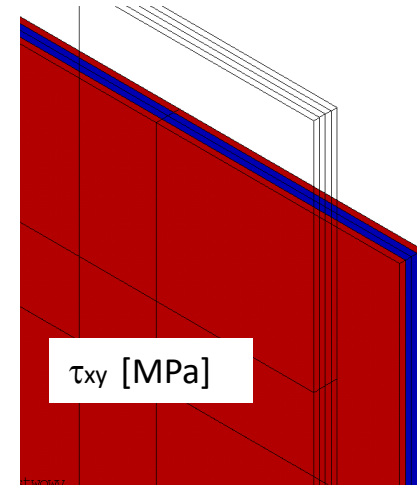
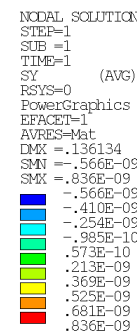
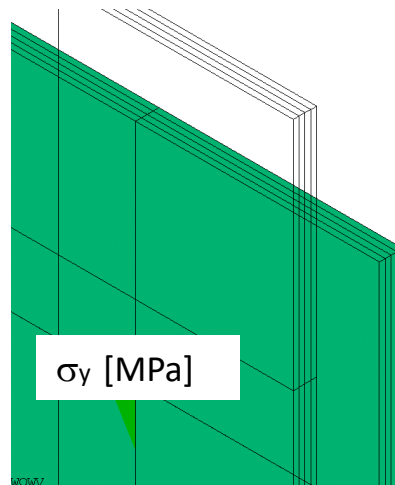
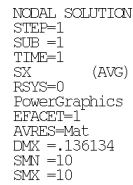
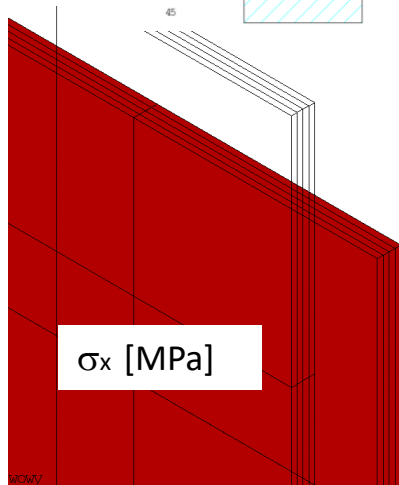
Składowe naprężenia w warstwach (*modyfikacja ułożenia warstw*)



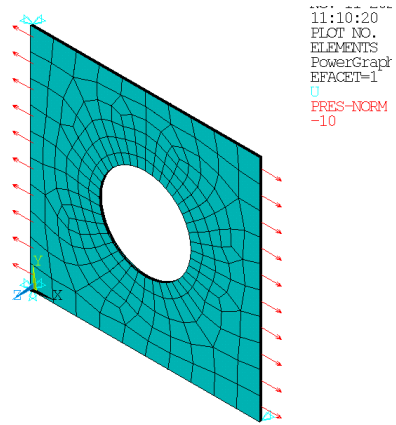
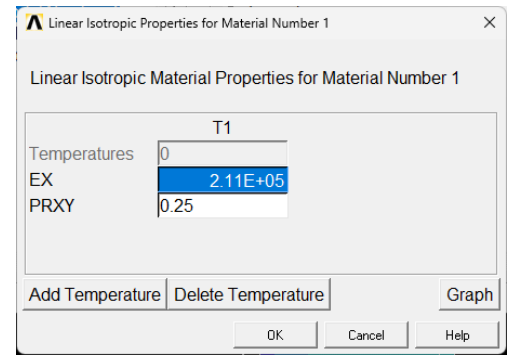
$[45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ]$ - niesymetrycznie



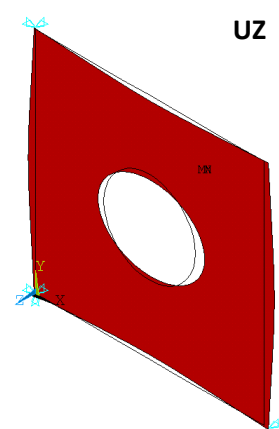
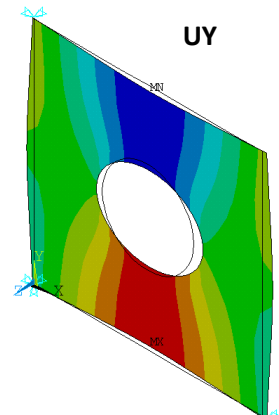
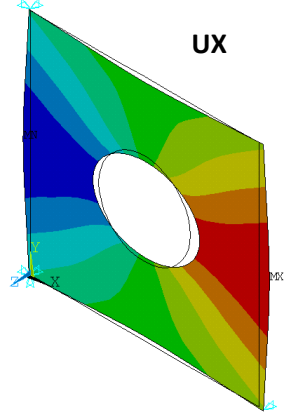
$[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ]$ - symetrycznie



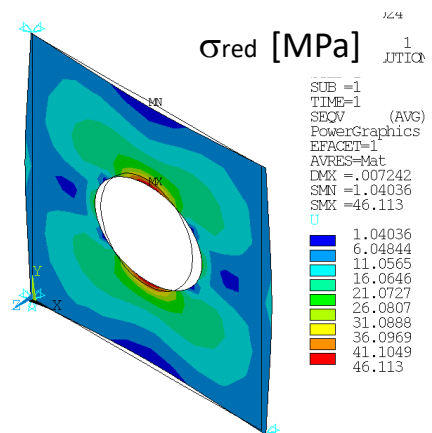
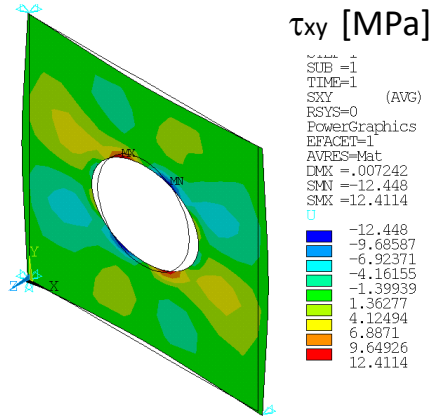
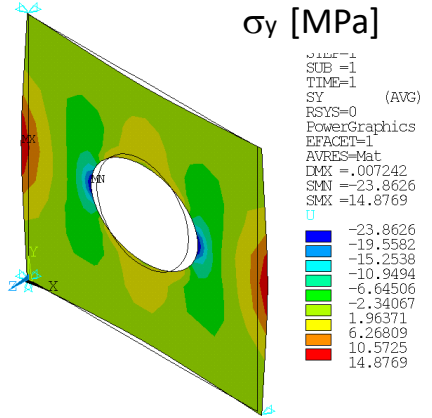
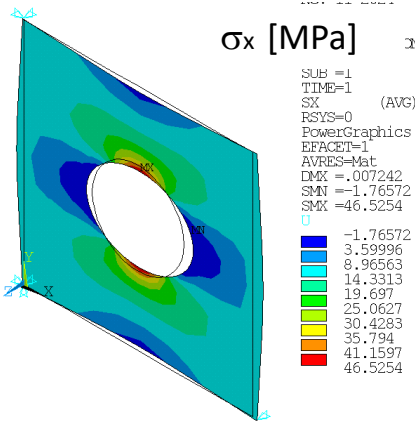
Przykład 4a Tarcza z karbem ϕ 40mm (materiał izotropowy)



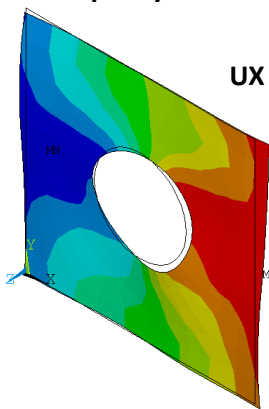
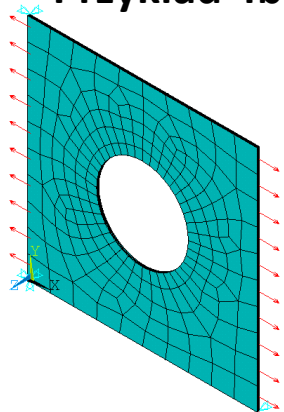
Przemieszczenia



Naprężenia



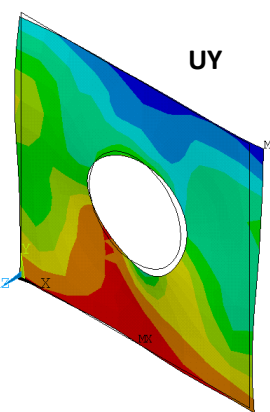
Przykład 4b Tarcza z przykładu 3 z karbem ϕ 40mm [45°, -45°, 45°, -45°] - niesymetrycznie



Przemieszczenia

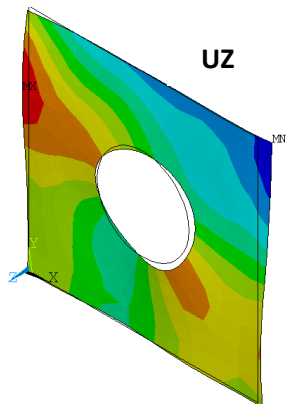
21:48:58
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UX (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.145112
SMN =-.009572
SMX =-.085029

-.009572
-.939E-03
.01145
.021961
.032473
.042994
.053495
.064006
.074517
.085029



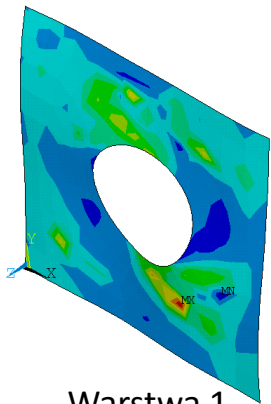
21:48:58
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.145112
SMN =-.053825
SMX =.005124

-.053825
-.047275
-.040725
-.034175
-.027625
-.021075
-.014525
-.007975
-.001426
.005124



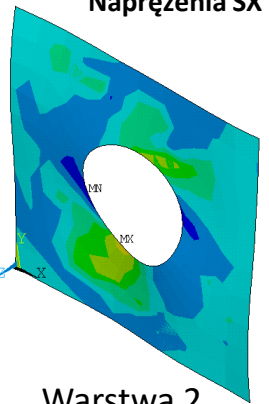
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.145112
SMN =-.105979
SMX =.064843

-.105979
-.086999
-.068019
-.049038
-.030058
-.011078
.007902
.026882
.045862
.064843



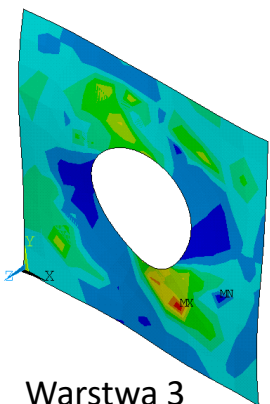
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
LAYER=1
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.145112
SMN =-7.80806
SMX =60.6899

-7.80806
-1.197179
7.4137
15.0246
22.6355
30.2463
37.8572
45.4681
53.079
60.6899



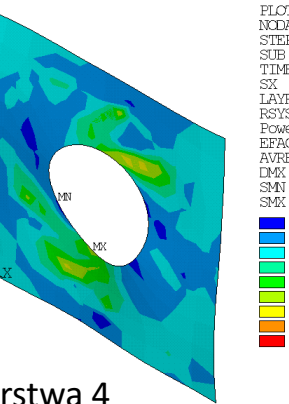
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
LAYER=2
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.145112
SMN =-15.393
SMX =89.2392

-15.393
-3.76716
7.85863
19.4844
31.1102
42.736
54.3618
65.9876
77.6134
89.2392



21:52:22
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
LAYER=3
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.145112
SMN =-11.6546
SMX =81.656

-11.6546
-1.28679
9.08106
19.4489
29.8167
40.1846
50.5524
60.9203
71.2881
81.656



PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
LAYER=4
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.145112
SMN =-6.02358
SMX =49.4933

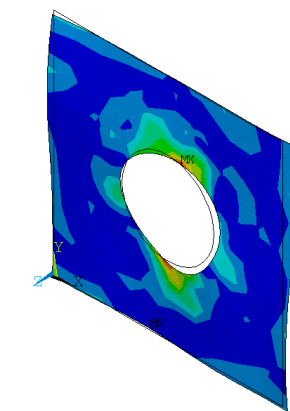
-6.02358
-1.44958
6.3135
12.482
18.6506
24.8191
30.9877
37.1562
43.3247
49.4933

Warstwa 1

Warstwa 2

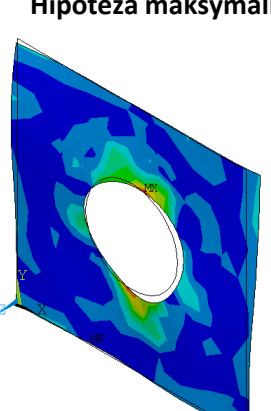
Warstwa 3

Warstwa 4



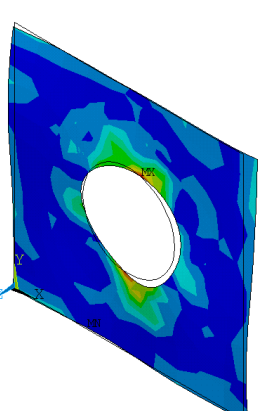
10:49:54
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILSMAX (AVG)
TOP
LAYER=1
RSYS=0
DMX =.145112
SMN =.032254
SMX =2.14339

.266824
.501395
.735965
.970536
1.20511
1.43968
1.67425
1.90882
2.14339



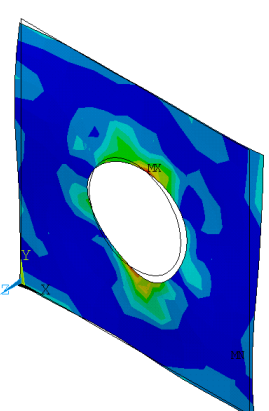
10:49:40
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILSMAX (AVG)
TOP
LAYER=2
RSYS=0
DMX =.145112
SMN =.024316
SMX =2.13218

.024316
.258523
.492729
.726936
.961143
1.19535
1.42956
1.66376
1.89797
2.13218



10:49:50
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILSMAX (AVG)
TOP
LAYER=3
RSYS=0
DMX =.145112
SMN =.012798
SMX =2.12096

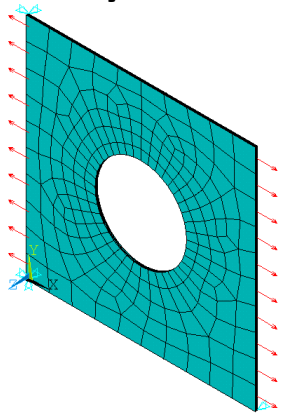
.012798
.247038
.481279
.71552
.94976
1.184
1.41824
1.65248
1.88672
2.12096



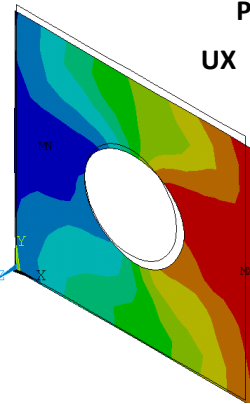
10:49:59
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILSMAX (AVG)
TOP
LAYER=4
RSYS=0
DMX =.145112
SMN =.008459
SMX =2.10975

.008459
.241936
.475413
.70889
.942367
1.17584
1.40932
1.6428
1.87628
2.10975

Przykład 4c Tarcza z przykładu 3 z karbem ϕ 40mm [45°, -45°, -45°, 45°] - symetrycznie



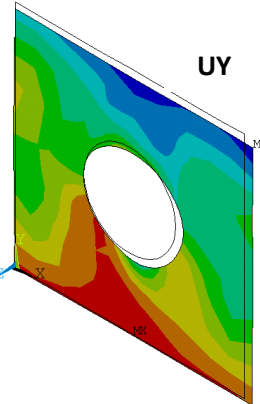
10:21:42
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
U
PRES-NORM
-10



Przemieszczenia

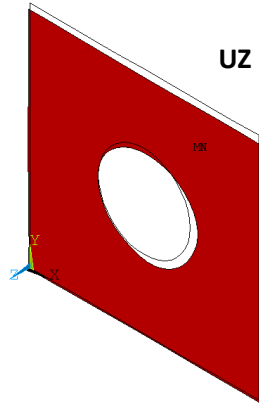
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UX (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.098935
SMN =-.008702
SMX =.083051

-.008702
.001493
.011688
.021883
.032077
.042272
.052467
.062662
.072856
.083051

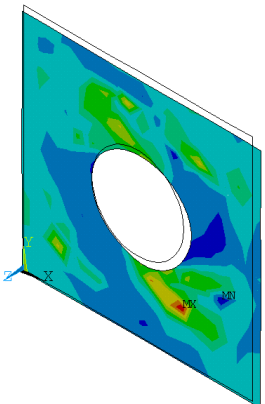


10:20:22
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UY (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.098935
SMN =-.054599
SMX =.003906

-.048098
-.041598
-.035097
-.028596
-.022096
-.015595
-.009095
-.002594
.003906

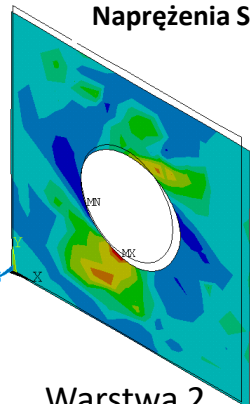


10:28:29
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UZ (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.098935



10:29:01
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
LAYER=1
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.098935
SMN =-9.9359
SMX =66.203

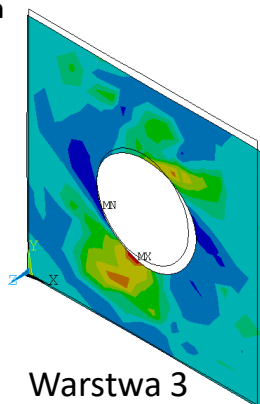
-1.47603
6.98385
15.4437
23.9036
32.3635
40.8233
49.2832
57.7431
66.203



Naprężenia SX w warstwach

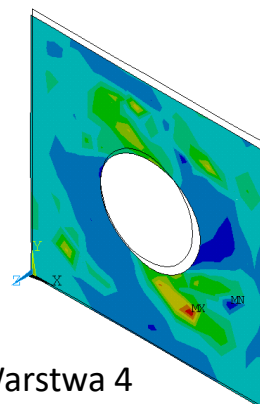
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
LAYER=2
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.098935
SMN =-8.32356
SMX =59.1689

-8.32356
-8.2439
6.67478
14.1739
21.6731
29.1723
36.6714
44.1706
51.6698
59.1689



10:28:27
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
LAYER=3
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.098935
SMN =-8.32356
SMX =59.1689

-8.32356
-8.2439
6.67478
14.1739
21.6731
29.1723
36.6714
44.1706
51.6698
59.1689



10:28:29
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
LAYER=4
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.098935
SMN =-9.9359
SMX =66.203

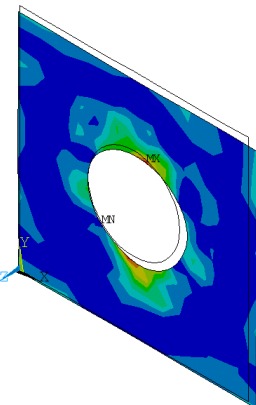
-1.47603
6.98385
15.4437
23.9036
32.3635
40.8233
49.2832
57.7431
66.203

Warstwa 1

Warstwa 2

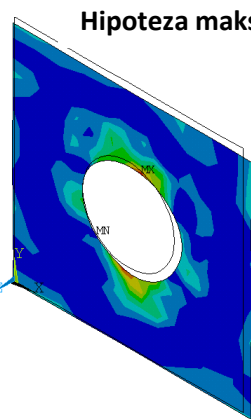
Warstwa 3

Warstwa 4



10:50:40
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILSMAX (AVG)
TOP
LAYER=1
RSYS=0
DMX =.098935
SMN =.005594
SMX =2.1261

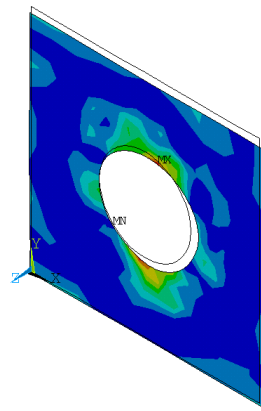
.005594
.241206
.476818
.71243
.948042
1.18365
1.41927
1.65488
1.89049
2.1261



Hipoteza maksymalnych naprężeń

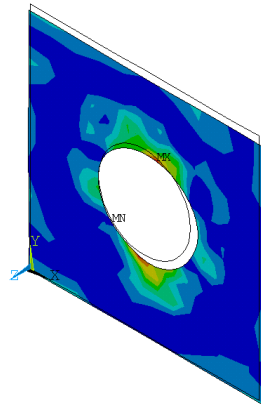
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILSMAX (AVG)
TOP
LAYER=2
RSYS=0
DMX =.098935
SMN =.006203
SMX =2.1261

.006203
.241748
.477292
.712836
.94838
1.18392
1.41947
1.65501
1.89056
2.1261



10:57:05
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILSMAX (AVG)
TOP
LAYER=3
RSYS=0
DMX =.098935
SMN =.006203
SMX =2.1261

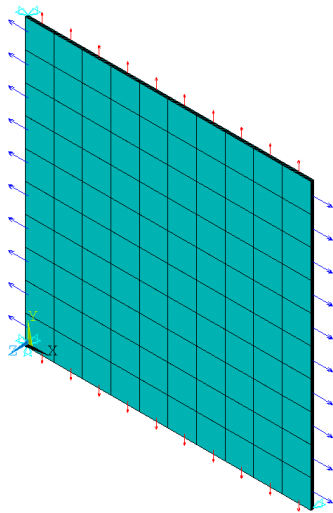
.006203
.241748
.477292
.712836
.94838
1.18392
1.41947
1.65501
1.89056
2.1261



10:57:05
PLOT NO. 1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
FAILSMAX (AVG)
TOP
LAYER=4
RSYS=0
DMX =.098935
SMN =.005594
SMX =2.1261

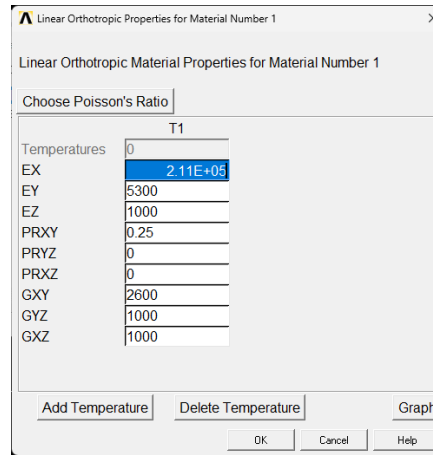
.005594
.241206
.476818
.71243
.948042
1.18365
1.41927
1.65488
1.89049
2.1261

Przykład5 Rozciąganie dwukierunkowe laminatu 4warstwowego (różne zbrojenia)



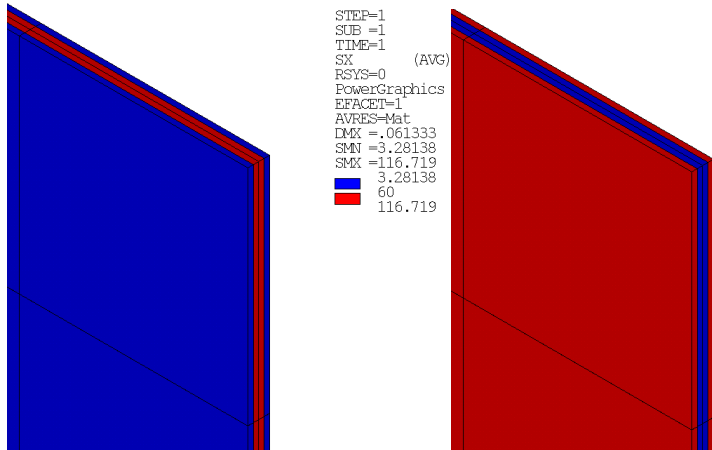
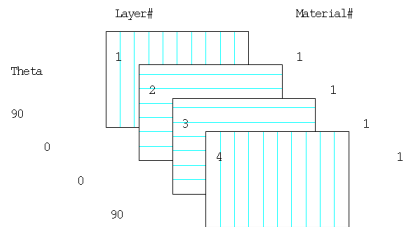
Build 19.2
 NOV 11 2024
 11:46:59
 PLOT NO.
 ELEMENTS
 PowerGraph:
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 FRES-NORM
 -60
 -45
 -30

Grubość każdej warstwy wynosi 0,25 mm

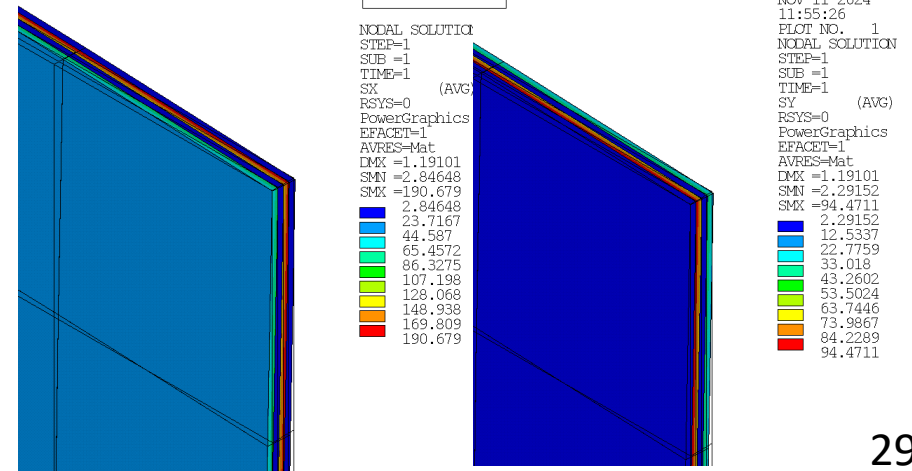
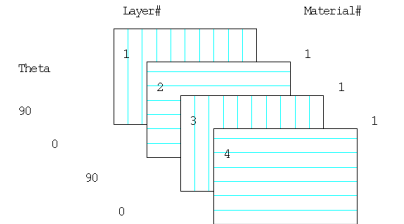


kompozyt 4 warstwowy rozciąganie 60 i 30

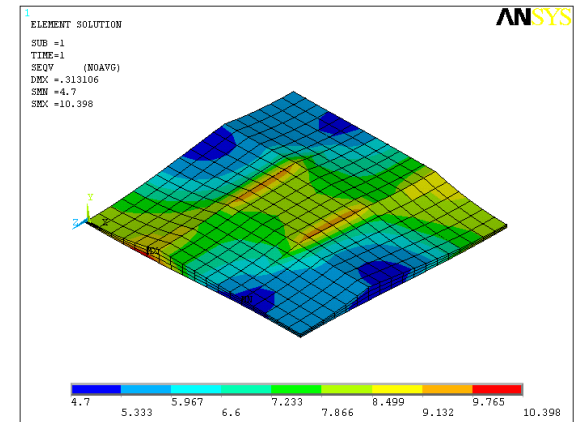
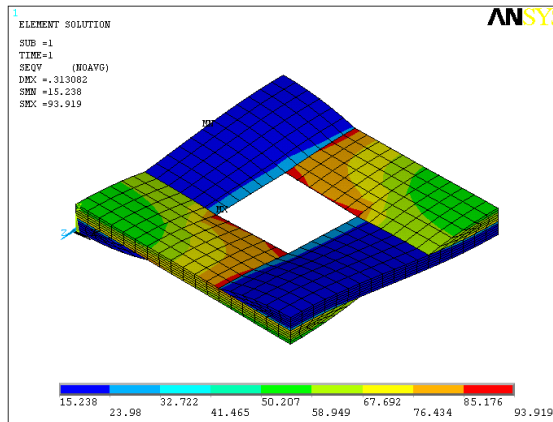
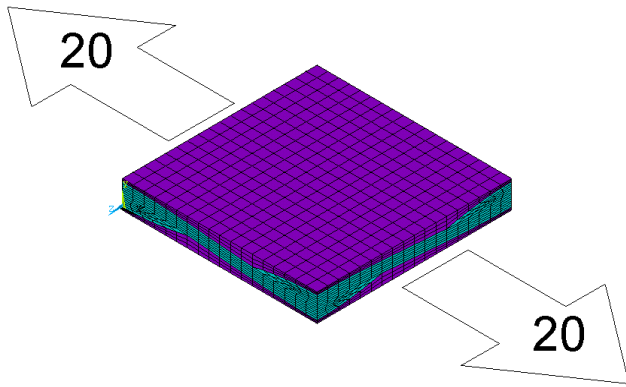
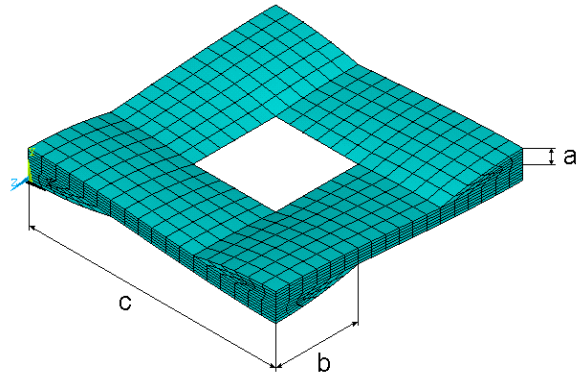
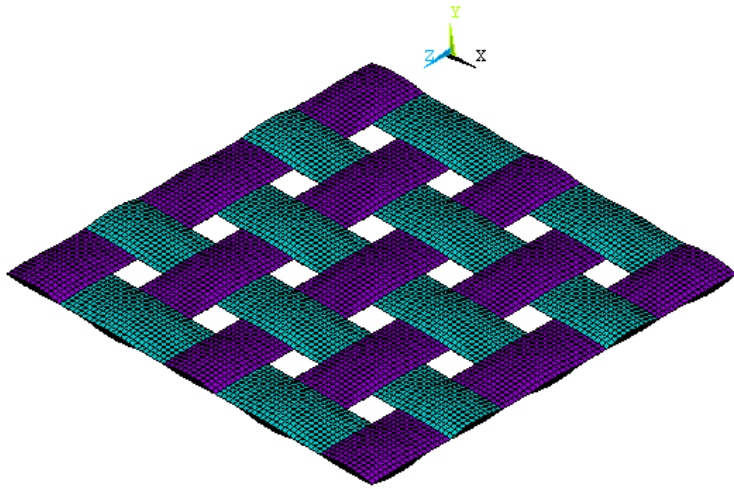
$[90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ]$ - symetrycznie



$[90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ - niesymetrycznie

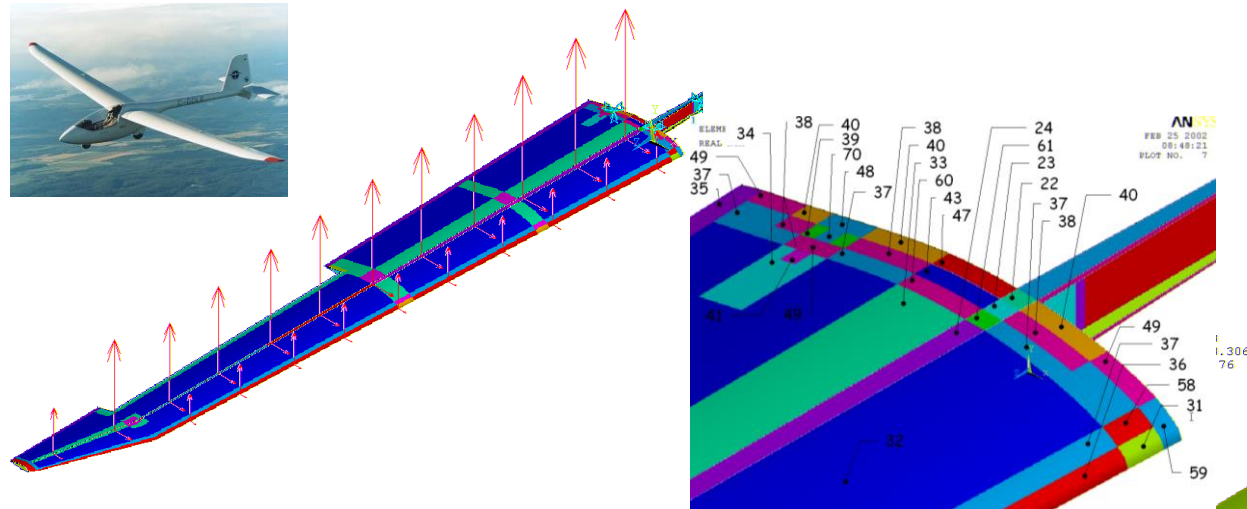


Przykład 6 modelowania MES warstwy tkaniny

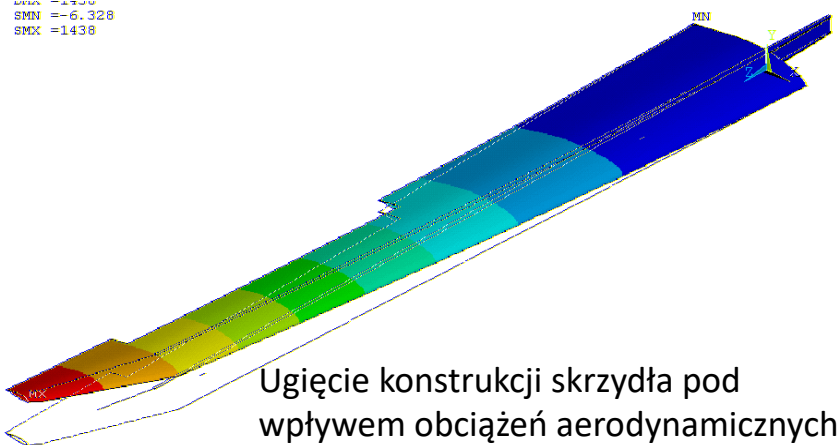


Przykład 7 analizy elementów skończonych kompozytowego elementu konstrukcji samolotu

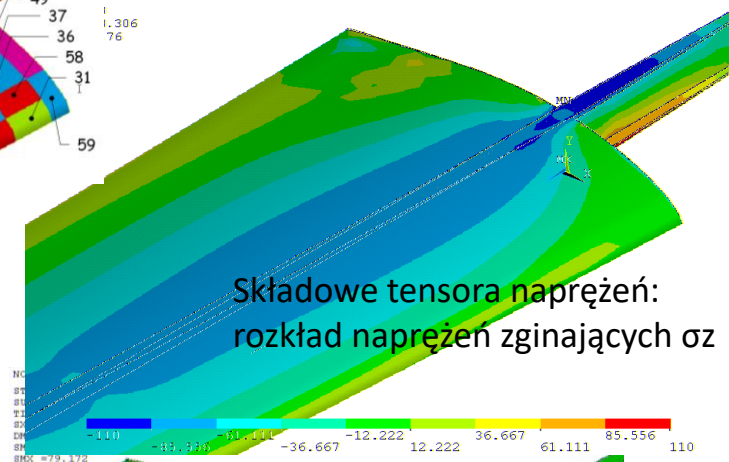
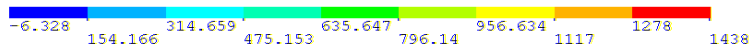
Analiza naprężeń i odkształceń kompozytowej struktury skrzydła szybowca PW-5



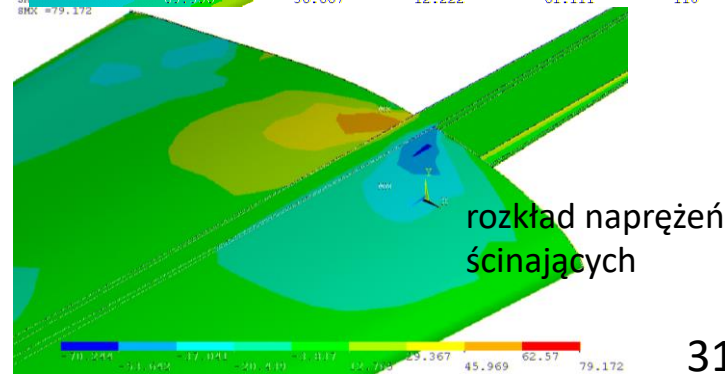
SMIN =-6.328
SMN =-6.328
SMX =1438



Ugięcie konstrukcji skrzydła pod wpływem obciążeń aerodynamicznych



Składowe tensora naprężeń:
rozkład naprężeń zginających σ_z



rozkład naprężeń ścinających

WYZNACZANIE ZASTĘPCZYCH WŁAŚCIWOŚCI MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH

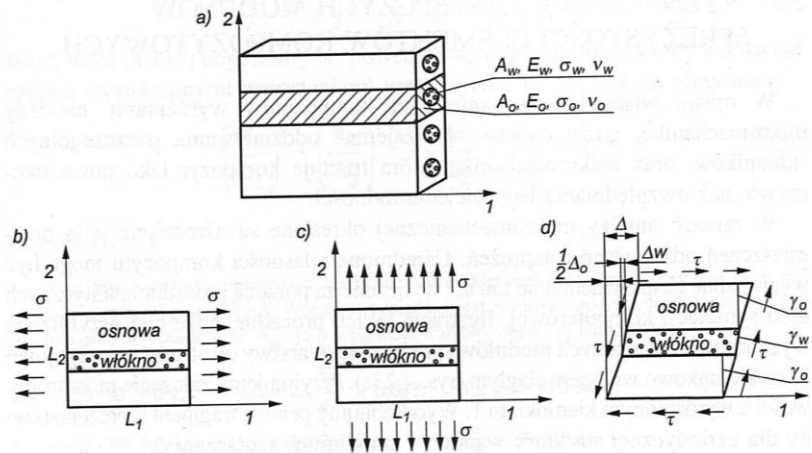
Mikromechanika (badane są wzajemne oddziaływania poszczególnych składników)

Makromechanika (traktuje kompozyt jako nowe tworzywo, bez uwzględniania jego niejednorodności).

Uśrednione własności kompozytu mogą być wyznaczone na drodze eksperymentalnej lub też wyliczone za pomocą procedur analitycznych albo symulacji komputerowej.

Ilustracją takich procedur może być przybliżone wyznaczenie zastępczych modułów sprężystości dla warstwy ortotropowej, zbrojonej jednokierunkowo włóknem długim, ciągłym:

Modele obciążeń powtarzalnego segmentu kompozytu z włóknem ciągłym stosowane do wyznaczenia zastępczych stałych sprężystych



Przyjmując założenie monotropowości z wyróżnionym kierunkiem 1, wyodrębnijmy pewien fragment reprezentatywny dla periodycznej struktury warstwy i przyjmijmy oznaczenia:

A_w – pole przekroju poprzecznego włókien w elemencie reprezentatywnym

A_o – pole przekroju poprzecznego osnowy

$A = A_o + A_w$ – pole przekroju całego elementu

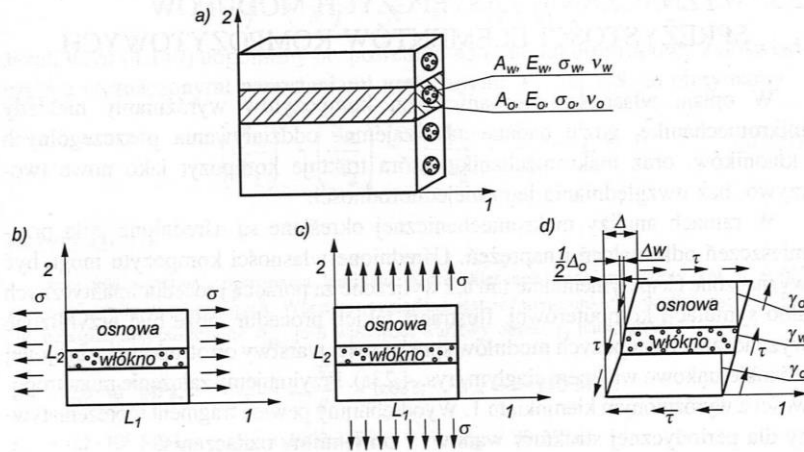
E_w, G_w, ν_w – stałe sprężystości materiału włókien

E_o, G_o, ν_o – stałe sprężystości materiału snowy

$E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, G_{12}$ – uśrednione stałe sprężystości warstwy ortotropowej

HOMOGENIZACJA

Homogenizacja - przejście od złożonego modelu niejednorodnego do modelu jednorodnego z zastępczymi własnościami materiałowymi.



A_w – pole przekroju poprzecznego włókien w elemencie reprezentatywnym

A_o – pole przekroju poprzecznego osnowy

$A = A_o + A_w$ – pole przekroju całego elementu

E_w, G_w, ν_w – stałe sprężystości materiału włókien

E_o, G_o, ν_o – stałe sprężystości materiału snowy

$E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, G_{12}$ – uśrednione stałe sprężystości warstwy ortotropowej

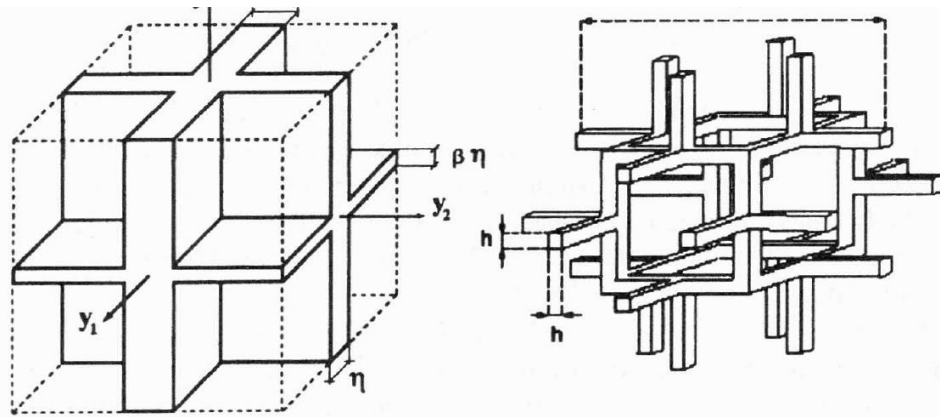
wartość zastępczego modułu Younga w kierunku włókna: $E_{11} = E_w \frac{A_w}{A} + E_o \frac{A_o}{A}$

wartość zastępczego modułu Younga w kierunku poprzecznym: $E_{22} = \frac{E_w \cdot E_o}{\frac{A_w}{A} \cdot E_w + \frac{A_o}{A} \cdot E_o}$

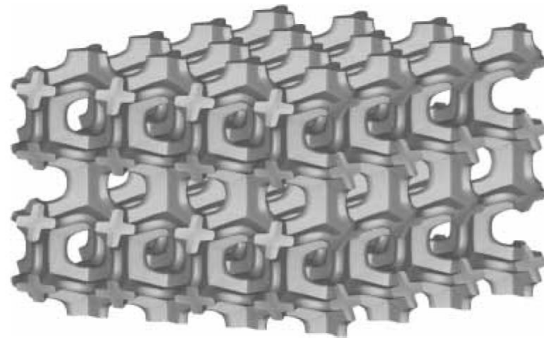
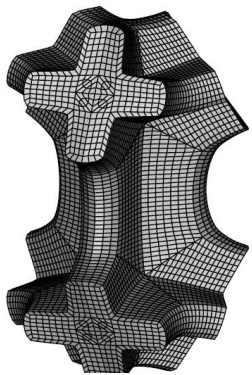
wartość zastępcza stałej Poissona: $\nu_{12} = \nu_w \frac{A_w}{A} + \nu_o \frac{A_o}{A}$, $\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}}$

wartość zastępcza moduł sprężystości poprzecznej: $G_{12} = \frac{G_w \cdot G_o}{\frac{A_w}{A} \cdot G_w + \frac{A_o}{A} \cdot G_o}$

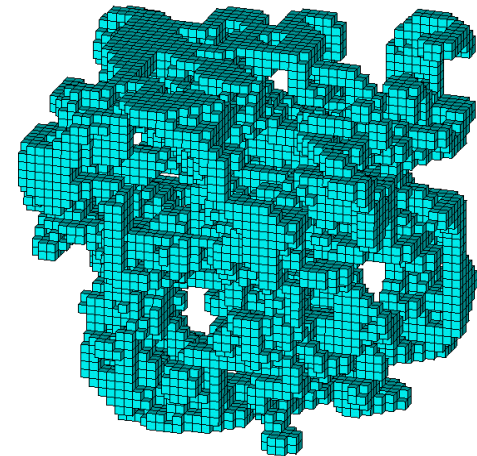
Periodyczne elementy reprezentatywne struktury porowatej wykorzystywane w modelach analitycznych i numerycznych



a) model do analitycznej homogenizacji periodycznej struktury porowatej



b) model numeryczny struktury periodycznej



c) model numeryczny struktury chaotycznej

Modele numeryczne homogenizacji laminatów wielowarstwowych (2003)

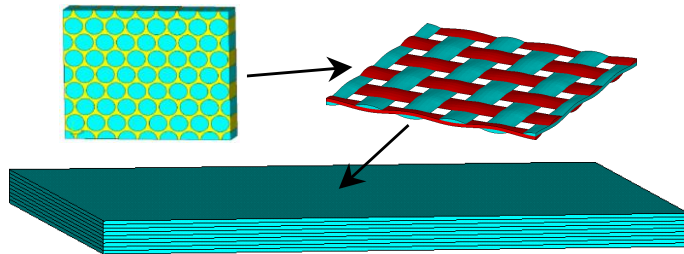
(wykonał: Romuald Dobosz)

promotor: dr inż. Grzegorz Krzesiński

Celem pracy jest przedstawienie numerycznej metody określania własności kompozytów, na przykładzie zbrojonego włóknem szklanym laminatu warstwowego. Wyznaczenie charakterystyk wytrzymałościowych kompozytu zrealizowane zostało poprzez określenie własności jego składników metodą homogenizacji, kolejno od mikro- do makrostruktury.

Możliwość przewidywania własności materiałów kompozytowych w skali makro na podstawie ich budowy wewnętrznej jest podstawą projektowania nowych materiałów i struktur. Służyć do tego może coraz częściej wykorzystywana w projektowaniu inżynierskim metoda elementów skończonych. Modele parametryczne metody elementów skończonych w powiązaniu z procedurami optymalizacyjnymi mogą stać się silnym narzędziem komputerowo wspomaganego projektowania kompozytów.

Posługując się modelami numerycznymi przeprowadzić można homogenizację kolejnych elementów struktury laminatu wielowarstwowego: włókno, pasmo, warstwa, laminat. W rezultacie otrzymujemy własności makroskopowe na podstawie własności składników i budowy wewnętrznej kompozytu.



Rys. 1. Kolejno analizowane elementy struktury kompozytu warstwowego

Kolejne reprezentatywne modele numeryczne powtarzalnego fragmentu struktury poddajemy prostym stanom obciążenia σ_j dla znalezienia zastępczych stałych materiałowych, wyznaczających macierz podatności S_{ij} równania konstytutywnego:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1)$$

gdzie: ε_i – składowe stanu odkształcenia zapisane w postaci wektorowej.

W celu zilustrowania sposobu określania własności kompozytów przeanalizowano dziewięciowarstwowy kompozyt, umocniony włóknami szklanymi grubości 10 μm typu E, o 70 % udziale objętościowym. Osnową spajającą włókna jest polimer PP (polipropylen). Warstwy składają się z pasm, plecionych w sposób pokazany na rys. 1. Wszystkie warstwy mają jednakową grubość równą 0.9 mm, natomiast sposób ich ułożenia określają kąty laminowania: [0/45/0/-45/0/45/0/-45/0].

Dane materiałowe włókien szklanych i osnowy podane zostały w tabeli 1:

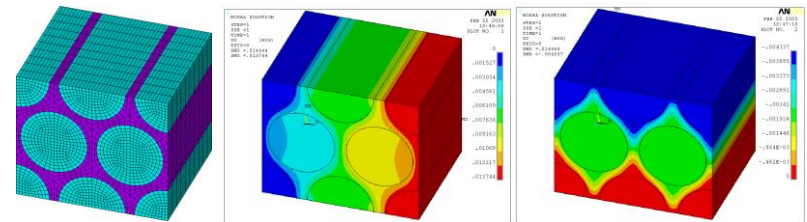
Tab. 1. Własności materiałowe szkła typu E oraz osnowy (polipropylen)

stała materiałowa	jednostka	szkło E	polipropylen
moduł Younga	GPa	73.1	3.45
stała Poissona	-	0.22	0.35

W każdym etapie badania własności poszczególnych składników, zbudowany musi być model wiernie oddający strukturę konkretnego elementu laminatu, stanowiący jak najmniejszą powtarzalną mikrokomórkę badanej struktury. Dla określenia własności pojedynczego pasma wystarczy analizować niewielką kostkę materiału zawierającą fragmenty zalanych osnową włókien. Przy wyznaczeniu stałych całej warstwy, modelem takim może być np. pojedynczy splot włókien, będący powtarzalnym elementem struktury warstwy.

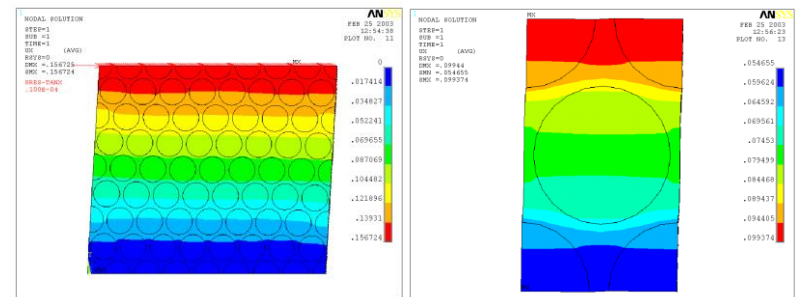
HOMOGENIZACJA PASMA

Wymiary modelu powtarzalnej struktury (mikrokomórki) wynikają z grubości włókien oraz ich udziału objętościowego. Przyjmując chaotyczne rozmieszczenie włókien, model mikrokomórki dla prób rozciągania pozwalających na wyliczenie zastępczych modułów E_i i stałych ν_{ij} może zostać określony w sposób przedstawiony na rys. 2:



Rys. 2. Model pozwalający wyznaczyć własności pojedynczego pasma oraz przykładowe wyniki przemieszczeń dla naprężenia $\sigma_x = 10$ MPa.

Dla wyliczenia zastępczych modułów sprężystości postaciowej model elementarnej kostki zostaje powielony w płaszczyźnie odpowiadającej wyliczanemu modułowi Kirchhoffa, a kąt odkształcenia postaciowego wyliczony zostanie w miejscu oddalonym jak najdalej od brzegu modelu, gdzie zniekształcenia wyników są największe.



Rys. 4. Wybrane wyniki. Rozkłady przemieszczenia u_x dla $\tau_{xy} = 10$ MPa.

Analiza pola przemieszczeń mikrokomórki dla sześciu typowych obciążeń pozwala wyznaczyć ortotropowe własności pasma (Tab.2.)

Modele numeryczne homogenizacji laminatów wielowarstwowych (2003)

(wykonał: Romuald Dobosz)

promotor: dr inż. Grzegorz Krześciński

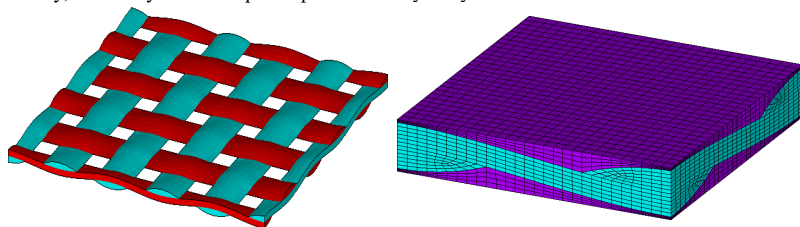
Tab. 2. Wyliczone własności materiałowe pasma kompozytu

moduł Younga [GPa]	$E_1 = 16.56$	$E_2 = 16.83$	$E_3 = 52.22$
Stała Poissona	$\nu_{21} = 0.364$	$\nu_{31} = 0.08$	$\nu_{32} = 0.081$
	$\nu_{12} = 0.37$	$\nu_{13} = 0.252$	$\nu_{23} = 0.251$
Moduł Kirchoffa [GPa]	$G_{12} = 4.41$	$G_{23} = 6.28$	$G_{13} = 6.5$

HOMOGENIZACJA WARSTWY

Następnym krokiem przy wyznaczaniu własności laminatu jest określenie własności całej warstwy kompozytu, która w tym wypadku jest zbudowana z tkaniny. Wystarczy tutaj podobnie jak poprzednio analizować niewielki jej wycinek, będący powtarzalnym elementem całej warstwy.

Model pojedynczego splotu warstwy kompozytu będący najmniejszą powtarzalną częścią warstwy, określony został w sposób przedstawiony na rys. 5.

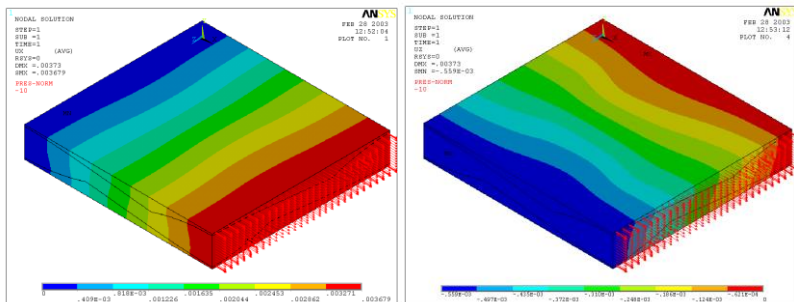


Rys. 5. Warstwa: wzór włókien i model mikrokomórki z osnową.

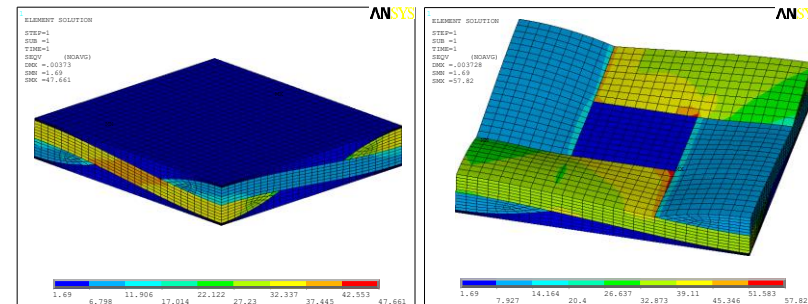
Przy założeniu, że warstwy pozostają w płaskim stanie naprężeń, własności każdej warstwy opisane mogą być tylko czterema stałymi: dwoma modułami Younga, stałą Poissona oraz modułem Kirchoffa.

Analiza deformacji modelu będących efektem trzech stanów obciążenia próbki prowadzi do wyznaczenia stałych opisujących własności wytrzymałościowe pojedynczej warstwy laminatu:

$$E_x = E_y = 14.35 \text{ GPa}; \quad G_{xy} = 2.166 \text{ GPa}; \quad \nu_{yx} = 0.152$$



Rys. 7. Pola przemieszczeń warstwy przy obciążeniu σ_x .



Rys. 8. Pola naprężeń warstwy przy obciążeniu σ_x .

LAMINAT

Własności całego laminatu określić można z uzyskanych poprzednio własności pojedynczej warstwy. Znając bowiem własności warstw i sposób ich ułożenia, przewidzieć można zachowanie się laminatu pod wpływem obciążenia ze znanych zależności teoretycznych:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

gdzie: $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ — odkształcenia oraz krzywizny powierzchni średniej laminatu

$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ — układ sił i mom. wzdłuż grubości laminatu

A - macierz sztywności w płaszczyźnie **B** - macierz sztywności sprzęgająca

D - macierz sztywności giętno-skrętnej.

z_k - odległość k-tej warstwy od powierzchni średniej N - liczba warstw

Q_{ij}^k - macierz sztywności k-tej warstwy transformowana do układu (X, Y)

Wyznaczając więc składowe macierze **A**, **B** i **D** otrzymujemy komplet stałych materiałowych całego kompozytu, dzięki którym możliwe jest wyznaczenie zachowania się laminatu pod wpływem obciążeń.

5. WNIOSKI

Przeprowadzone testy wykazały efektywność prezentowanej metody dla wyznaczania własności laminatów. Pewne trudności sprawiać może budowa odpowiednich modeli dla prób ścinania oraz wybór reprezentatywnej komórki dla bardziej złożonych splotów. Rozwinięcie i parametryzacja zbudowanych modeli numerycznych mogłyby ułatwić projektowanie laminatu dla uzyskania z góry założonych własności w skali makro i umożliwić optymalizację jego struktury.